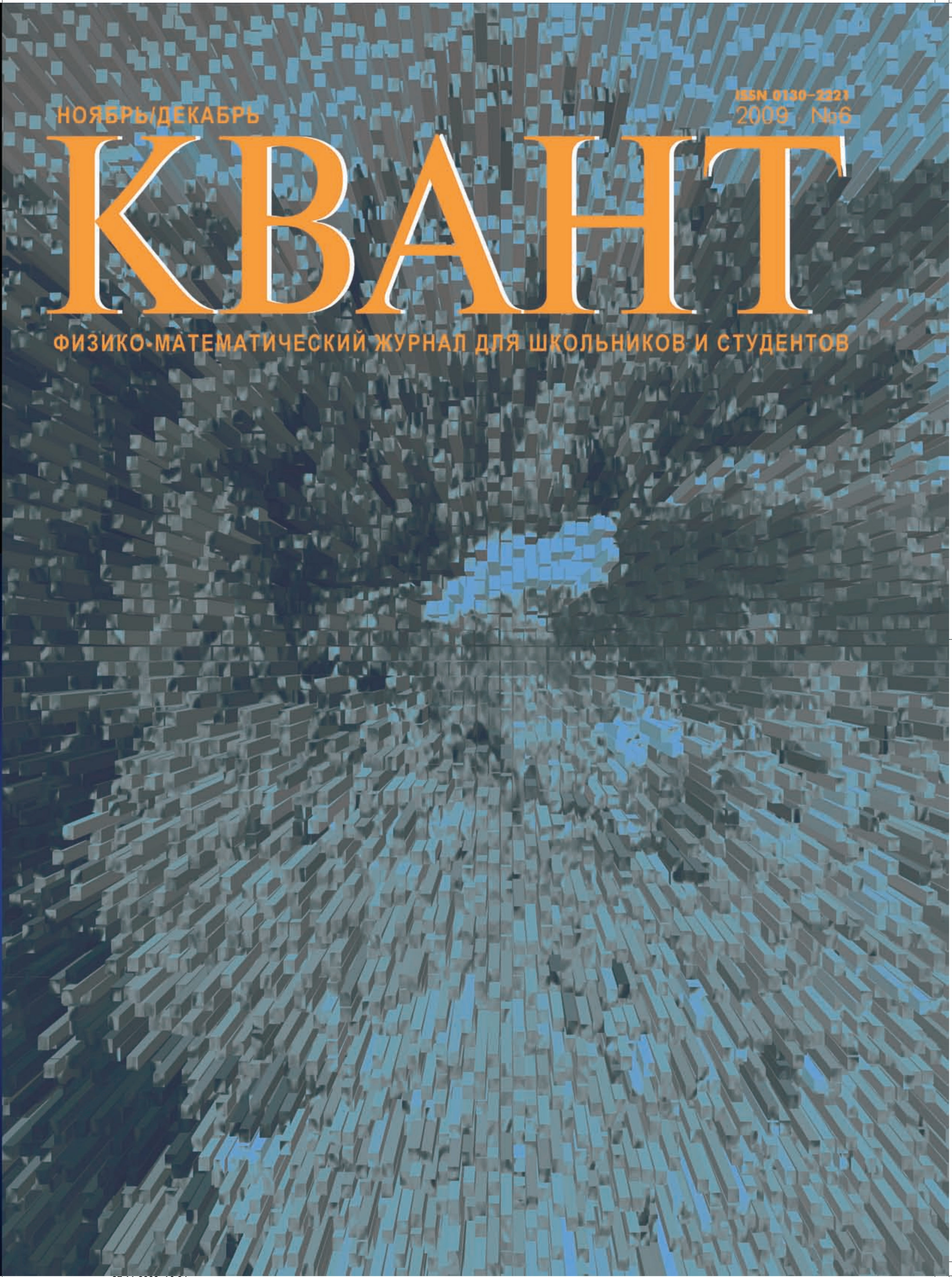


НОЯБРЬ/ДЕКАБРЬ
ISSN 0130-2221
2009 №6

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

ГАЕЧНЫЙ КЛЮЧ

Перед вами головоломка «Гаечный ключ». Достаточно одного взгляда на нее, чтобы понять задачу — нужно отцепить проволочное кольцо. Головоломку легко сделать самому, исходя из фотографии. Единственное условие: цепочка должна быть достаточно короткой, чтобы ее нельзя было снять с ключа, но при этом — достаточно длинной, чтобы висеть свободно и не мешать движению кольца. Автор идеи головоломки — москвич Кирилл Гребнев («Квант» уже неоднократно писал о его оригинальных изобретениях). Использовать гаечный ключ в конструкции предложил Дмитрий Певницкий.

Е.Епифанов

журнал© Квант
НОЯБРЬ ДЕКАБРЬ 2009 № 6
НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

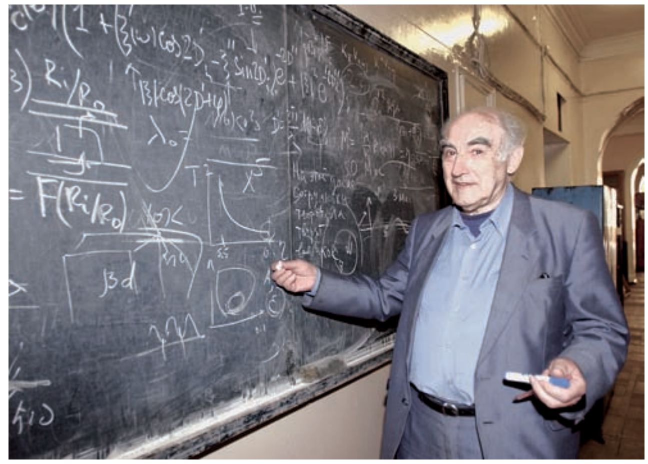
В номере:

TENEX В издании журнала «Квант» финансовое участие принимает ОАО «ТЕХСНАБЭКСПОРТ»

Квант

Учредители — Российская академия наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна), ИФТТ РАН
Издатель – ООО НПП ОО «Бюро Квантум»

ПАМЯТИ ВИТАЛИЯ ЛАЗАРЕВИЧА ГИНЗБУРГА



Виталий Лазаревич Гинзбург

(4.10.1916 – 8.11.2009)

Российская и мировая наука понесли тяжелую утрату. Ушел из жизни великий физик, замечательный человек и выдающийся педагог – Виталий Лазаревич Гинзбург. Его научные работы и результаты известны физикам всех стран мира.

Академик Российской академии наук (РАН), доктор физико-математических наук, профессор, Советник РАН, руководитель научной группы Физического института им.П.Н.Лебедева РАН, автор около 450 научных работ и более 20 научных монографий и учебных пособий, иностранный член ряда научных обществ и академий, в том числе Лондонского Королевского общества, Американской национальной академии наук, Европейской академии и др., Виталий ЛазаревичГинзбург много успел сделать для физической науки.

В 2003 году В.Л.Гинзбургу (совместно с А.А.Абрикосовым и Э.Дж.Леггетом) была присуждена Нобелевская премия по физике «За пионерский вклад в теорию сверхпроводников и сверхтекучих жидкостей».

Нельзя представить себе теоретическую физику нашего времени без разработанных им теорий, а российское образование и общественную жизнь – без его научных, научно-популярных и публицистических произведений. Бесконечная доброжелательность в сочетании с высоконравственной гражданской позицией и научной принципиальностью – вот что определяло поведение Виталия Лазаревича в многочисленных, часто непростых, жизненных ситуациях. Он постоянно заботился о развитии науки, много и с тревогой думал о воспитании молодого поколения. В.Л.Гинзбург был близок и нашему журналу, он печатал свои статьи в «Кванте», был постоянным членом редколлегии «Библиотечки «Квант».

В.Л.Гинзбург – крупнейший физик-теоретик, ему принадлежит ряд фундаментальных результатов в области квантовой теории, теории твердого тела, теоретической радиофизики, астрофизики, теории сверхпроводимости, оптики, специальной и общей теории относительности. Он участвовал в особо важных исследованиях, связанных с созданием термоядерного оружия. Именно он был автором одной из основных идей, приведших к созданию такого оружия. Многие результаты В.Л.Гинзбурга признаны классическими, вошли в учебники и активно цитируются как отечественными, так и зарубежными учеными.

В его работах предсказано существование термоэлектрических явлений в сверхпроводниках, развита феноменологическая теория сегнетоэлектрических явлений, создана феноменологическая теория сверхпроводимости и сверхтекучести жидкого гелия, создана теория кристаллических эффектов с учетом пространственной дисперсии, установлен критерий применимости теории Ландау фазовых переходов второго рода, указана возможность высокотемпературной сверхпроводимости в слоистых системах за счет электрон-экситонного взаимодействия, разработана теория распространения радиоволн в плазме, исследовано нелинейное воздействие на ионосферу мощных радиоволн – таков далеко не полный перечень впечатляющих результатов, полученных *одним* человеком.

В течение 18 лет Виталий Лазаревич возглавлял Теоретический отдел Физического института – один из основных центров теоретической физики в нашей стране. Он несколько десятилетий руководил уникальным еженедельным московским семинаром по теоретической физике. С 1968 года В.Л.Гинзбург возглавлял созданную им в Московском физико-техническом институте кафедру проблем физики и астрофизики. За годы существования кафедры ее закончили более 250 студентов и аспирантов, около 90 из них защитили кандидатские и около 30 – докторские диссертации. Среди учеников В.Л.Гинзбурга – академики и члены-корреспонденты РАН.

В.Л.Гинзбург всегда активно участвовал в работе научных и ученых советов и редакционных коллегий научных журналов – как отечественных, так и зарубежных. С 1998 года был главным редактором ведущего российского физического журнала «Успехи физических наук». В 1989 – 1991 годах В.Л.Гинзбург был народным депутатом СССР от Академии наук.

Виталий Лазаревич Гинзбург отмечен следующими наградами: Нобелевская премия (2003), Золотая медаль «Юнеско–Нильс Бор» (1998), Золотая медаль Лондонского Королевского астрономического общества (1991), Золотая медаль Э. Резерфорда (1981), Премия им. Дж. Бардина (1991), Премия им. Вольфа (1994/1995), Ленинская премия (1966), Государственная премия СССР (1953), Премия «Россиянин года» (2006), Орден «За заслуги перед Отечеством» III степени (1996), Орден «За заслуги перед Отечеством» I степени (2006), Большая золотая медаль им. М.В. Ломоносова РАН (1995), Золотая медаль им. С.И. Вавилова (1995), Премия им. М.В. Ломоносова (1962), Премия им. Л.И. Мандельштама (1947), Премия «Триумф (наука)» (2002).

Измеряем прочность тел от нано до мега

А.ВОЛЫНСКИЙ, Л.ЯРЫШЕВА

ЗАВИСИТ ЛИ ПРОЧНОСТЬ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОТ ЕГО размеров? Вопрос может показаться странным. Под прочностью обычно понимают напряжение, при достижении которого твердое тело распадается на части. Обратите внимание – *напряжение*, т.е. сила, деленная на поперечное сечение, а не просто сила. Сила действительно зависит от размеров твердого тела. Например, чтобы разорвать одну нить, достаточно относительно малой силы, а чтобы разорвать сплетенный из этих же ниток канат, необходимо затратить существенно большее усилие. Но если силу отнести к поперечному сечению твердого тела (в первом случае малую силу к сечению одной нитки, а во втором – большую силу к сумме сечений всех ниток, составляющих канат), мы получим одно и то же разрушающее напряжение, или прочность. Казалось бы, ответ на заданный вопрос получен: нет, не зависит.

Однако все оказывается не так просто, если обратиться к практике. Установлено, что переход вещества от микро- к наноразмерам влечет за собой качественные изменения в его физических, механических, физико-химических и других свойствах. Эти изменения настолько разительны, что перед учеными встает неотложная задача изучить и понять механизм их возникновения.

Чем отличаются твердые тела, имеющие наноразмеры, от обычных твердых тел?

Самое очевидное отличие – усиление роли приповерхностной области. Взаимодействие между молекулами (атомами) на поверхности отличается от объемного взаимодействия, поскольку молекулы не имеют соседей с внешней стороны. С уменьшением размера образца вклад молекул, находящихся в поверхностном слое, возрастает. Это можно проследить на примере того, как изменяется отношение объема поверхностного слоя к полному объему. Для сферического образца размером 1 мкм поверхностный слой толщиной в 1 нм составит ничтожно малую долю, в то время как для образца размером 10 нм эта доля приближается к 50%.

Таким образом, в объемных, блочных, твердых телах вклад поверхностного слоя в макроскопические свойства крайне мал, и им обычно пренебрегают. Однако когда размеры твердого тела делаются малыми, соизмеримыми с молекулярными размерами (наноразмерами), влияние приповерхностных слоев становится значительным, и свойства вещества качественно изменяются.

Измеряем нанопрочность

Несмотря на уже достигнутые результаты в изучении свойств вещества в наносостоянии, проблема прочности материалов, имеющих размеры единиц – десятков нанометров, пока далека от своего решения. Отсутствие данных о деформационно-прочностных свойствах твердых тел в слоях нанометрового диапазона обусловлено главным образом экспериментальными трудностями.

Стандартный подход к оценке механических свойств твердых тел включает в себя изготовление образца, помещение его в зажимы деформирующего устройства и деформирование образца, сопровождающееся регистрацией напряжений и деформаций. В данном случае такой подход оказывается совершенно неэффективным. Действительно, трудно себе представить, каким образом можно изготовить образец толщиной в 10 нм, поместить его в некое устройство, подвергнуть деформации и измерить соответствующее напряжение.

Понятно, что развитие новых методов исследования, способных дать достоверную информацию о фундаментальных свойствах нановещества, очень актуально. Для практического решения этой задачи на химическом факультете МГУ им. М.В.Ломоносова был предложен новый подход к оценке механических свойств твердых тел, который базируется на обнаруженных ранее фундаментальных деформационно-прочностных свойствах полимерных пленок с нанесенным на их поверхность тонким покрытием. В экспериментальном плане такой подход очень прост. Твердое тело, свойства которого необходимо оценить, наносится в виде тонкого (практически любой толщины, в том числе и нанометровой) слоя на поверхность полимерной пленки. Методы такого нанесения хорошо разработаны, поскольку полимерные пленки с тонкими покрытиями широко используются на практике.

Оказалось, что если такую пленку с покрытием подвергнуть простому растяжению в одном направлении, то на ее поверхности произойдут удивительные превращения. На рисунке 1 представлена электронная микрофотография поверхности полимерной пленки с

Эта статья опубликована в рамках договора с ГК «РОСНАНОТЕХ»

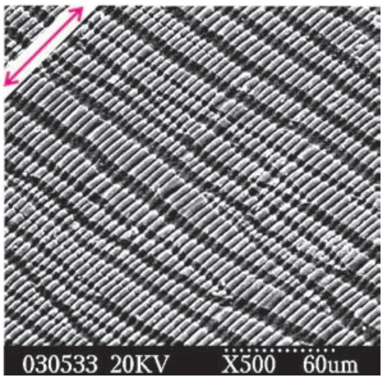


Рис.1. Поверхность образца поливинилхлорида, на который нанесли тонкий (16 нм) слой платины и после этого растянули в направлении стрелки на 50% при 90 °С (изображение получено в сканирующем электронном микроскопе)

нанометровым покрытием после ее растяжения в полтора раза. Легко видеть, что растяжение имеет удивительные последствия – покрытие распадается на множество сильно вытянутых (почти одномерных) островков примерно одинакового размера, ориентированных перпендикулярно направлению растяжения, и на поверхности пленки возникает удивительно регулярный микрорельеф. Поражает четкая регулярность самопроизвольно возникающего рельефа и строгая ориентация его элементов относительно оси растяжения. Углубления и вершины всегда ориентированы строго вдоль (параллельно) оси растяжения. При фрагментации покрытия также достигается высокая степень порядка. Таким образом, при растяжении полимерной пленки с тонким твердым покрытием образуются высокоорганизованные периодические структуры.

С чем связаны наблюдаемые изменения в поверхностном слое полимерной пленки с тонким покрытием? Важно отметить, что полимеры, хотя и являются твердыми телами, но, подобно жидкостям, при деформации стремятся сохранить постоянным свой объем. Это означает, что растяжение в одном направлении сопровождается соответствующим сжатием (контракцией) пленки в направлении, перпендикулярном действующей растягивающей силе. Другими словами, полимерная пленка испытывает два вида деформации одновременно: растяжение и (в нормальном к нему направлении) сжатие. Очевидно, что и нанесенное на поверхность пленки покрытие также будет испытывать оба вида напряжений. Оказывается, именно сжатие ответственно за возникновение регулярного рельефа, а растяжение вызывает разделение (разрушение) покрытия на отдельные фрагменты.

Экспериментальное и теоретическое исследование обнаруженного явления позволило разработать универсальную методику оценки механических свойств, и в частности прочности, твердых тел в слоях практически любой толщины. Установлена четкая связь между наблюдаемыми особенностями фрагментации и рельефообразования покрытия при деформировании полимера-подложки и свойствами материала покрытия и подложки. Так, средний размер (L) фрагмента разрушения в направлении оси растяжения (светлых полос на рисунке 1) оказывается равным

$$L = \frac{4h\sigma_{\text{пр}}}{\sigma_0}, \qquad (*)$$

где h – толщина покрытия, $\sigma_{\text{пр}}$ – предел его прочности и σ_0 – напряжение в подложке. Значение h известно, величина σ_0 легко определяется в эксперименте, а L прямо измеряется на микрофотографии. Таким образом, данное соотношение дает возможность простым путем находить важнейшую характеристику твердого тела – прочность в слоях практически любой толщины.

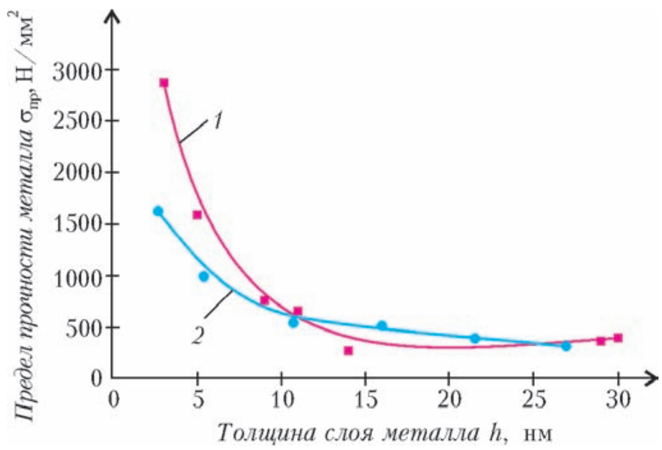


Рис.2. Зависимости прочности золота (1) и платины (2) от толщины металлического слоя, нанесенного на пленку полиэтилентерефталата (пленку с покрытием растягивали на 100% при 90 °С)

Теперь можно попытаться использовать формулу (*) для оценки прочности твердого тела в слоях нанометрового диапазона. На рисунке 2 представлена зависимость предела прочности платины и золота от толщины металлического слоя, нанесенного на полиэтилентерефталатную пленку. Видно, что в интервале толщин от 30 до приблизительно 15 нм прочность обоих металлов практически не зависит от толщины и составляет 180–220 Н/мм^2 для золота и 250–300 Н/мм^2 для платины. Эти значения хорошо согласуются с известными значениями прочности для блочных металлов (176–250 Н/мм^2 для золота и 240–351 Н/мм^2 для платины). В то же время, при уменьшении толщины покрытия ниже 15 нм прочность обоих металлов начинает возрастать: для платины достигается значение 1500–1700 Н/мм^2, для золота – до 2800 Н/мм^2. Получается, что прочность металла в нанослоях по крайней мере на порядок превосходит прочность блочного материала. Приведенные результаты можно считать первой прямой экспериментальной оценкой прочности твердого тела нанометрового размера в условиях его растяжения. Кроме того, эти данные позволяют провести условную границу между размерами твердого тела, в данном случае металла, в обычном объемном состоянии и в наносостоянии.

Итак, ответ получен: прочность твердого тела зависит от его размеров в наноразмерном диапазоне, причем чем меньше размер, тем выше прочность. Важно отметить, что, несмотря на отсутствие прямых измерений прочности твердого тела в нанослоях, теория предсказывает рост прочности твердых тел при переходе к наномасштабам.

От нано к мега

Вот такие интересные последствия удается наблюдать при простом растяжении полимерных пленок с тонкими нанометровыми покрытиями. Но неужели только в них могут происходить описанные явления? Трудно представить, что это так. Существует немало физических объектов, построенных по принципу «твердое покрытие на податливом основании». Не исключено, что деформация (сжатие и растяжение) полимерных пленок с тонкими покрытиями моделирует многие процессы в окружающем нас мире.

В природе очень часто имеют место ситуации, когда подобные системы подвергаются разного рода деформациям. Как следствие, возникают многочисленные регулярные структуры. Потеря устойчивости в условиях плоскостного сжатия приводит к появлению удивительно красивых рельефов – таких, например, которые образуются при высыхании капли краски.

Системы «твердое покрытие на податливом основании» подвергаются и деформации плоскостного растяжения. Его результаты видел каждый, кто замечал на почве сухие, в трещинах, корки. Когда высыхает влажная земля, образовавшаяся на ее поверхности твердая корка стремится сжаться, но этому препятствует лежащее под ней мягкое, почти несжимаемое основание – слой грязи. В результате корка оказывается в условиях плоскостного растяжения. За счет испарения жидкости из почвы растягивающие напряжения усиливаются, и появляется сетка трещин на жесткой поверхности. Трещины образуются и распространяются по строгим законам, присущим все тем же системам «твердое покрытие на податливом основании».

Аналогичные картины возникают и при остывании магматических расплавов – так называемых вулканических бомб. При медленном остывании расплава граница между жестким слоем и еще не остывшей жидкой сердцевиной движется вглубь. Твердая фаза, непрерывно сосуществующая вместе с жидкой, постоянно подвергается деформации плоскостного растяжения. Когда этот процесс замедлен, фрагментация происходит настолько регулярно, что кажется делом человеческих рук. Именно этот механизм лежит в основе возникновения удивительного природного объекта – базальтовых пальцев. Одно из таких образований находится в Северной Ирландии и известно как Мостовая гигантов (рис.3).

Рис.3. Столбчатые структуры Мостовой гигантов в Северной Ирландии

А разве наша Земля не похожа на типичную систему «твердое покрытие на податливом основании»? По современным представлениям, относительно тонкая (5–50 км) твердая наружная оболочка нашей планеты (литосфера) покоится на относительно податливой и толстой (2900 км) оболочке – верхней мантии. Ее вязкое, текучее вещество находится в состоянии неустойчивости из-за вертикального теплового градиента. Полагают, что именно поэтому в мантии генерируются гигантские конвекционные потоки (ячейки). За счет конвекции возникает механическое напряжение в земной коре, которое ответственно за такие геодинамические процессы, как дрейф континентов, формирование

(Продолжение см. на с. 9)

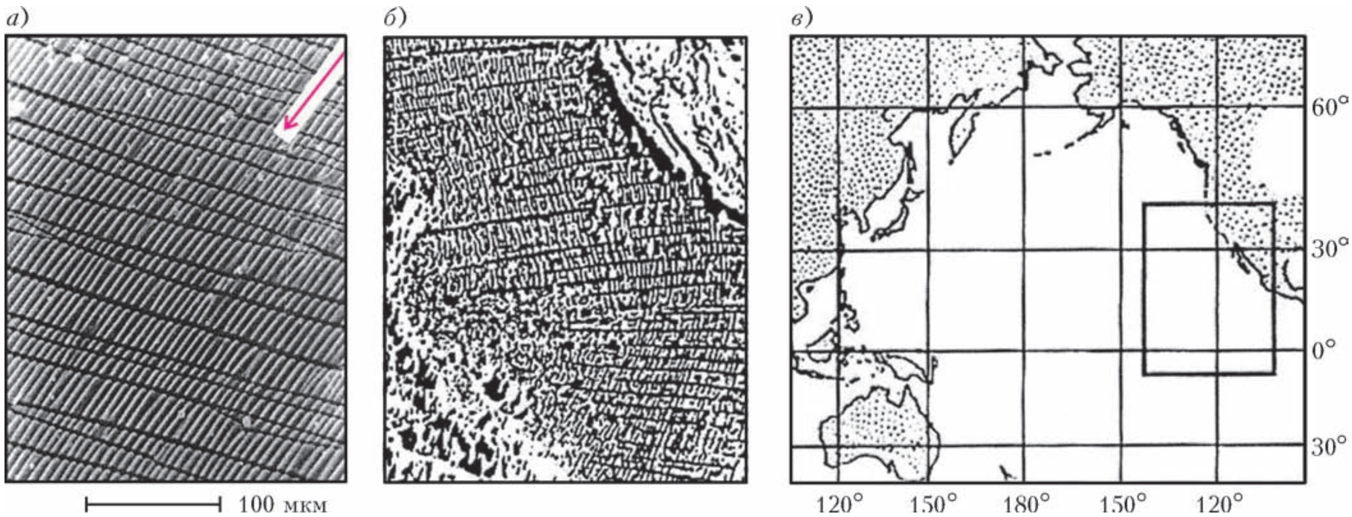


Рис.4. Электронная микрофотография образца натурального каучука с тонким (10 нм) золотым покрытием, растянутого на 50% (а); карта рельефа дна Тихого океана в районе Восточно-Тихоокеанского поднятия (б) и положение соответствующего участка в Тихом океане (в)

Прямая Сильвестра

С.ТАБАЧНИКОВ, В.ТИМОРИН

Графики многочленов: теорема Борвейна

Формулировка задачи Сильвестра настолько общая, что в ней можно заменять точки и прямые на многие другие объекты и получать осмысленные утверждения. Прямые и точки обладают некоторыми специальными свойствами. Например, через каждую пару точек можно провести прямую, и только одну. Похожие утверждения имеют место для графиков многочленов. Например, рассмотрим графики квадратных трехчленов

$$y = ax^2 + bx + c$$

($a = 0$ не воспрещается!).

Упражнение 13. Докажите, что через каждую тройку точек с различными x-координатами проходит график квадратного трехчлена, и только один.

Перенесем теорему Сильвестра–Галлаи на графики квадратных трехчленов. Рассмотрим конечное множество M точек на плоскости с различными x-координатами. Предположим, что не все точки множества M лежат на графике одного и того же квадратного трехчлена. В этом случае найдется такой квадратный трехчлен (аналог прямой Сильвестра), график которого содержит ровно три точки из множества M.

Докажем это. Предположим, что график квадратного трехчлена, проходящий через любую тройку точек множества M, содержит хотя бы еще одну точку этого множества. Предположим также, что не все множество M принадлежит одному графику.

Будем измерять расстояние от точки плоскости до графика функции по вертикали. Если расстояние равно нулю, то точка лежит на графике. Среди пар, состоящих из точек множества M и графиков квадратных трехчленов, проходящих через тройки точек множества M, найдется пара с минимальным ненулевым расстоянием от точки до графика. Обозначим эту точку через $(a;b)$, а квадратный трехчлен – через $g(x)$. Пусть $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ – абсциссы четырех точек множества M на графике $y = g(x)$.

Рассмотрим случай $x_2 < a < x_3$. Существует квадратный трехчлен $f(x)$, график которого проходит через три точки $(x_1;g(x_1))$, $(a;b)$, $(x_4;g(x_4))$ (рис. 6). Рассмотрим квадратный трехчлен

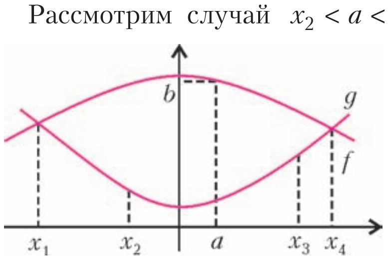


Рис. 6

$h(x) = f(x) - g(x)$. Поскольку x_1 и x_4 – его корни, $h(x)$ меняет монотонность на отрезке $(x_1;x_4)$ не более одного раза (на рисунке – сначала возрастает, затем убывает). Это означает, что хотя бы одно из чисел $|h(x_2)|$ и $|h(x_3)|$ меньше, чем $|h(a)|$. А значит, или точка $(x_2;g(x_2))$ или точка $(x_3;g(x_3))$ находится ближе к графику $y = f(x)$, чем $(a;b)$ к $y = g(x)$. Противоречие.

Упражнение 14. Рассмотрите оставшиеся случаи: $a < x_2$ и $x_3 < a$.

Теорема для квадратных трехчленов является частным случаем более общей теоремы Борвейна [8], относящейся к произвольным системам Чебышева. Формулировать ее в полной общности мы не будем, но наметим еще несколько частных случаев в виде упражнений.

Упражнения

15. Докажите, что через любые $n + 1$ точек на плоскости с различными x-координатами можно провести графики многочлена степени не выше n. Более того, такой многочлен ровно один. Сформулируйте и докажите обобщение теоремы Сильвестра–Галлаи для графиков многочленов степени не выше n.

16. Рассмотрим функции вида

$$f(x) = a\cos x + b\sin x + c\,.$$

Докажите, что если f не равна тождественно нулю, то она обращается в ноль не более чем для двух значений x в полуинтервале $[0;2\pi)$. Сформулируйте и докажите аналог теоремы Сильвестра–Галлаи для функций данного класса. *Указание*: искомый аналог будет некоторым утверждением про конечное множество точек на плоскости, x-координаты которых различны и лежат в некотором фиксированном полуинтервале длины 2π, скажем, в $[0;2\pi)$.

А в пространстве?

Еще одно естественное направление для обобщений и аналогов задачи Сильвестра – это выход из плоскости в пространство. Непосредственное пространственное обобщение звучало бы так. Пусть дан конечный набор M точек в трехмерном пространстве. Допустим, что не все эти точки лежат в одной плоскости. Верно ли, что найдется плоскость, содержащая три неколлинеарные точки множества M и больше никакие? К сожалению, ответ отрицательный. Простейший контрпример состоит из шести точек, лежащих на двух скрещивающихся прямых, – три точки на одной прямой, и три на другой.

Упражнение 17. Возможно еще такое пространственное обобщение проблемы Сильвестра (казалось бы, еще более

Окончание. Начало см. в «Кванте» №5.

непосредственное). Пусть дано конечное множество точек в пространстве, не все на одной плоскости. Верно ли, что есть плоскость, содержащая ровно три точки нашего множества (возможно, коллинеарные)? Ответ на этот вопрос тоже отрицательный, а контрпример получается простой модификацией примера, приведенного выше.

Приведенный выше контрпример был построен Моцкиным в 1951 году [9]. Он же доказал следующее (более правильное) обобщение теоремы Сильвестра–Галлаи.

Теорема 4. *Если не все точки конечного множества M лежат в одной плоскости, то найдется такая, плоскость (будем называть ее плоскостью Моцкина), пересечение которой с M состоит из нескольких (по меньшей мере, двух) коллинеарных точек и еще одной точки, не коллинеарной с ними.*

Окружности

Теорема Моцкина может быть использована для переноса теоремы Сильвестра–Галлаи на случай окружностей. Рассмотрим конечное множество точек на сфере. Всякая плоскость, проходящая через 3 различные точки сферы, высекает на сфере некоторую окружность. Допустим, что не все точки множества M лежат на одной окружности (или, что эквивалентно, не все точки лежат в одной плоскости). Тогда найдется плоскость Моцкина, пересечение которой с M состоит из ряда коллинеарных точек и еще одной единственной точки, не коллинеарной этому ряду. Заметим, однако, что ряд коллинеарных точек на сфере не может содержать больше двух точек. Следовательно, плоскость Моцкина содержит ровно три точки множества M, и эти точки с необходимостью не коллинеарны. В частности, эти три точки лежат на окружности, которая не содержит других точек множества M. Таким образом, мы получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Для конечного множества точек M на сфере, не все из которых лежат на одной окружности, найдется такая окружность (аналог прямой Сильвестра), которая содержит ровно три точки множества M.*

Рассмотрим стереографическую проекцию сферы на плоскость. Напомним, что стереографическая проекция определяется таким образом. Центр проекции – точка A на сфере. Проекция точки B на сфере (отличной от точки A) – эта такая точка C на выбранной нами плоскости, что A, B и C коллинеарны (рис.7). Известный факт состоит в том, что стереографическая проекция окружности на сфере – это окружность или прямая на плоскости (прямая получается в том случае, когда исходная окружность проходит через точку A). Наоборот, кривая, проецирующаяся в окружность или прямую на плоскости, обязательно является окружностью на сфере. Если этот факт неизвестен читателю, то было бы очень полезно его доказать самостоятельно.

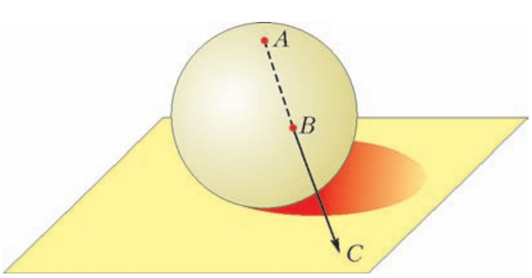


Рис. 7

При помощи стереографической проекции мы получаем следующую теорему.

Теорема 6. *Пусть дано конечное множество точек на плоскости. Допустим, что не все точки этого множества лежат на одной прямой и не все точки лежат на одной окружности. Тогда найдется прямая или окружность, содержащая ровно три точки нашего множества.*

На самом деле, можно доказать более сильное утверждение, и при этом даже не нужно использовать теорему Моцкина.

Теорема 7. *Пусть дано конечное множество M точек на плоскости. Допустим, что не все точки множества M лежат на одной прямой, и не все лежат на одной окружности. Тогда для всякой точки A из M найдется прямая или окружность, содержащая A и еще ровно две точки множества M.*

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать следующее утверждение для сферы (оно получается из только что сформулированной теоремы стереографической проекцией). Пусть дано конечное множество точек M' на сфере, не лежащее на одной окружности. Тогда, для всякой точки A' из множества M' найдется окружность на сфере, содержащая точку A' и еще ровно две точки множества M'. Чтобы доказать это утверждение, сделаем еще одну стереографическую проекцию, на этот раз с центром в точке A'. При этой проекции самой точке A' не соответствует никакая точка плоскости (неформально говоря, ей соответствует бесконечно удаленная точка). Все окружности, содержащие точку A', переходят в прямые. В результате нашей новой стереографической проекции мы получаем новое множество M'' точек на плоскости, не лежащее на одной прямой (поскольку множество M' не лежало на одной окружности). Но тогда для него существует прямая Сильвестра! Спроецируем эту прямую обратно на сферу и получим окружность, содержащую, помимо точки A', еще ровно две точки множества M'. Теорема доказана.

Дополнение: коники[1]

Естественно попытаться обобщить задачу Сильвестра на алгебраические кривые данной степени: ведь прямые и окружности – это естественные примеры кривых первой и второй степени. Для степени 2 речь идет о *кониках* – плоских кривых, заданных квадратичными уравнениями на координаты. Квадратичное уравнение – это уравнение, скажем относительно координат x и y, содержащее члены 1, x, y, x^2, y^2, xy с некоторыми коэффициентами. Тем самым, общая ко-

[1] *Это дополнение требует несколько большего запаса математических навыков, чем остальные разделы. В любом случае, читателю может быть интересна формулировка основной теоремы.*

ника на плоскости задается таким уравнением:

$$a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 = 0 .$$

Здесь $a_0, \ldots, a_5$ – некоторые постоянные коэффициенты (действительные числа). Мы предполагаем, что коэффициенты a_3, a_4, a_5 не равны одновременно нулю; иначе получится не коника, а прямая. Даже если квадратичные члены присутствуют, коника может оказаться вырожденной, т.е. объединением двух прямых (возможно, совпадающих) или точкой. Бывают квадратичные уравнения, которым не удовлетворяет ни одна точка плоскости (например, $x^2 + y^2 + 1 = 0$), но мы такие уравнения рассматривать не будем. Невырожденные коники – это эллипсы, параболы и гиперболы.

Заметим, что если уравнение коники умножить на число, отличное от нуля, то сама коника от этого не изменится. Всего в уравнении фигурирует 6 коэффициентов, но, как мы только что видели, существенными параметрами могут быть только отношения коэффициентов, но не сами коэффициенты. Нетрудно показать, что коника в самом деле существенным образом зависит от 5 параметров. Например, через любые 5 точек проходит коника, и, как правило, только одна.

Упражнения

18. Докажите, что через любые 5 точек на плоскости проходит некоторая коника.

19. Пусть точки A и B лежат на конике K. Тогда пересечение коники K с прямой AB состоит либо из двух точек A и B, либо из всей прямой AB.

Вайзман и Вильсон [10] доказали в 1988 году такую теорему.

Теорема 8. *Рассмотрим конечное множество точек M на плоскости. Допустим, что не все точки множества M принадлежат одной конике. Тогда найдется коника, содержащая ровно 5 точек из M и определяющаяся этими точками (т.е. нет никакой другой коники, проходящей через те же 5 точек).*

Мы представим в виде ряда упражнений новое доказательство теоремы Вайзмана–Вильсона. Оно более элементарно, чем оригинальное доказательство. Большинство упражнений являются скорее тестами на понимание, чем содержательными задачами, – читателю просто рекомендуется прочесть внимательно условия всех упражнений и понять, почему они очевидны. Отдельные упражнения покрывают отдельные шаги в доказательстве.

Упражнения

20. Рассмотрим три точки A, B и C на плоскости, не лежащие на одной прямой. Другими словами, мы имеем дело с вершинами треугольника ABC. Поместим массы 1, u, v в точки A, B, C соответственно. Обозначим через $X(u,v)$ центр масс трех рассматриваемых точек. Пару чисел (u,v) можно считать координатами точки $X(u,v)$. Таким образом, мы ввели другую систему координат на плоскости. (Заметим, что центр масс можно определить даже в том случае, когда u и/или v равны нулю или даже меньше нуля; проблема возникает только в том случае, когда сумма всех трех масс равна нулю, т.е. $1 + u + v = 0$.) Докажите, что в новой системе координат любая коника тоже представляется квадратичным уравнением.

21. Рассмотрим конику, проходящую через все три вершины треугольника ABC. В этом случае уравнение коники имеет специальный вид. А именно, некоторые коэффициенты обращаются в ноль. Запишем сначала уравнение коники в общем виде:

$$b_0 + b_1u + b_2v + b_3u^2 + b_4uv + b_5v^2 = 0 .$$

Теперь попробуем понять, какое ограничение на коэффициенты накладывает тот факт, что наша коника проходит через точку A. Точка A имеет координаты (0, 0) (т.е. $u = v = 0$). Значит, при $u = v = 0$ уравнение должно быть верным. Это произойдет только в том случае, когда $b_0 = 0$. Точки B и C накладывают следующие соотношения на коэффициенты: $b_3 = b_5 = 0$. Докажите это (рассуждение сложнее, чем для точки A, поскольку точки B и C не соответствуют никаким конечным значениям координат (u, v) – для рассмотрения этих точек придется поместить в точку A нулевую массу). Уравнение коники, описанной вокруг треугольника ABC, тем самым сведется к такому:

$$au + bv + cuv = 0$$

(мы здесь переобозначили коэффициенты).

22. Рассмотрим теперь все коники, описанные вокруг треугольника ABC, и докажем аналог теоремы Сильвестра–Галлаи для таких коник. Заметим (проверьте это утверждение!), что через любые две точки, не лежащие на прямых AB, BC и AC, можно провести конику, описанную вокруг треугольника ABC, притом только одну. (На самом деле, как мы уже упоминали, конику можно провести всегда; однако, если обе точки лежат на прямой, содержащей сторону треугольника ABC, то единственность нарушается.) Рассмотрим теперь некоторое конечное множество точек на плоскости, не принадлежащих прямым AB, BC и AC и удовлетворяющих следующему условию: на конике, описанной вокруг треугольника ABC и содержащей две точки нашего множества, лежит еще по крайней мере одна точка нашего множества. В этом случае все точки нашего множества лежат на одной и той же конике, описанной вокруг треугольника ABC.

Указание. Рассмотрите систему координат (u, v), связанную с треугольником ABC и описанную выше. Уравнение любой коники, описанной вокруг треугольника ABC, имеет вид $au + bv + cuv = 0$. Поделим это уравнение на uv, мы получим $av^{-1} + bu^{-1} + c = 0$. Значит, если вместо координат u и v ввести координаты $1/v$ и $1/u$, то в новых координатах уравнения коник, описанных вокруг треугольника ABC, будут линейными. Это значит, что на плоскости с координатами $1/v$ и $1/u$ такие коники изобразятся прямыми. Примените к этим прямым классическую теорему Сильвестра–Галлаи.

Скажем, что пятерка точек на плоскости *определяет конику*, если есть только одна коника, содержащая эти пять точек.

Упражнение 23. Пусть дано конечное множество M точек на плоскости. Допустим, что для каждых пяти точек множества M, определяющих конику, найдется некоторая шестая точка множества M на той же конике. Мы хотим доказать теорему Вайзмана–Вильсона, которая говорит, что в этом случае все точки множества M лежат на одной и той же конике. Докажите пока следующее утверждение: для любой тройки точек A, B и C множества M, не лежащих на одной прямой, все множество M содержится в объединении прямых AB, BC, AC и некоторой коники, описанной вокруг треугольника ABC.

Рассмотрим конечное множество M точек на плоскости такое, как в предыдущем упражнении. Если все точки множества M лежат на одной и той же прямой, то теорема Вайзмана–Вильсона доказана (прямая всегда является частью вырожденной коники). Допустим, что это не так. Тогда найдутся три точки A, B и C множества M, не лежащие на одной прямой. Согласно приведенному выше упражнению все точки множества M содержатся в объединении прямых AB, BC, AC и некоторой коники K, описанной вокруг треугольника ABC.

Упражнения

24. Предположим сначала, что найдется точка D из множества M, не лежащая в объединении прямых AB, BC и AC. Точка D, следовательно, обязана принадлежать конике K. Если все точки множества M принадлежат конике K, то теорема доказана. Допустим, что некоторые точки принадлежат объединению трех прямых AB, BC и AC, но не конике K. Например, пусть множество M содержит точку C_1, лежащую на прямой AB, но отличную от точек A и B. Докажите, что пять точек A, B, C, C_1, D определяют конику. Эта коника вырожденная; она совпадает с объединением прямых AB и CD.

25. Если в объединении прямых AB и CD нет других точек множества M, кроме точек A, B, C, C_1, D, то теорема доказана. Допустим, что есть какая-то шестая точка C_2. Эта точка обязана принадлежать прямой AB.

26. Либо C_1, либо C_2 не принадлежит прямой CD. Допустим, что это C_1. Мы знаем, что все точки множества M лежат в объединении прямых, содержащих стороны треугольника ADC, и некоторой коники K_1, описанной вокруг треугольника ADC. В частности, точки B и C_1 должны принадлежать конике K_1. Отсюда следует, что коника K_1 сводится к объединению прямых AB и CD. Таким образом, все точки множества M принадлежат объединению прямых AB, CD и AC (прямые AD и DC не могут иметь общих точек с коникой K, отличных от вершин треугольника ADC). Другими словами, все точки множества лежат в объединении прямых, содержащих стороны некоторого невырожденного треугольника.

27. Теперь достаточно рассмотреть случай, когда все точки множества M принадлежат объединению прямых AB, BC, AC. Поскольку M не может содержаться в объединении двух прямых, найдутся точки A_1, B_1, C_1 на прямых BC, AC, AB соответственно, не совпадающие с вершинами треугольника ABC. Предположим, что точки A_1, B_1, C_1 не лежат на одной прямой. Тогда, согласно доказанному выше, все точки множества M лежат в объединении прямых A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 и некоторой коники, описанной вокруг треугольника $A_1B_1C_1$. Покажите, однако, что никакая коника, описанная вокруг треугольника $A_1B_1C_1$, не может содержать точки A, B и C одновременно. Противоречие.

28. Таким образом, точки A_1, B_1 и C_1 коллинеарны. Более того, множество M состоит только из шести точек A, B, C, A_1, B_1 и C_1. (В самом деле, если бы была еще одна точка в множестве M, то можно было бы заменить A_1, B_1 или C_1 на эту точку и получить невырожденный треугольник.) Но в этом случае пять точек A, B, A_1, B_1, C_1 определяют вырожденную конику, которая не содержит никаких других точек множества M.

Мы, таким образом, завершили доказательство теоремы Вайзмана–Вильсона.

Список литературы

8. P.Borwein. *On Sylvester's problem and Haar spaces*. – Pacific J. of Math., Vol 109 (1983), №2.
9. T.Motzkin. *The lines and planes connecting the points of a finite set*. – Trans. Amer. Math. Soc., 70 (1951), 451–464.
10. J.A.Wiseman, P.R.Wilson. *A Sylvester theorem for conic sections*. – Discrete and Comput. Geom., 3 (1988), 295–305.
11. L.Bouttier, M.Zaidenberg. *Le probleme de Sylvester*. – Quadrature, Janvier–Mars 2008.
12. Г.С.М.Кокстер. *Действительная проективная плоскость*. – М.: Физматгиз, 1959.
13. Г.С.М.Кокстер. *Введение в геометрию*. – М.: Наука, 1966.
14. G.D.Chakerian. *Sylvester's problem on collinear points and a relative*. – Amer. Math. Monthly, 77 (1970), 164–167.

Измеряем прочность тел от нано до мега

(Начало см. на с. 3)

рельефа, открытие и закрытие океанов, извержения вулканов, землетрясения и т.п.

Как видим, строение верхних оболочек нашей Земли полностью соответствует структуре систем «твердое покрытие на податливом основании». Неудивительно поэтому, что рельеф колоссального по размерам участка океанического дна в районе Восточно-Тихоокеанского поднятия поразительно похож на рельеф, образующийся при растяжении армированных полимерных пленок (рис.4).

Многим, по-видимому, покажется фантастической идея родственности процессов, вызывающих регулярность разрушения твердого покрытия на податливой полимерной подложке, и событий, происходящих в земной коре. Но такая аналогия все же вполне правомерна. К настоящему времени первым автором статьи использованы уравнения, полученные для полимерных пленок с тонкими твердыми покрытиями, для расчетов напряжения прочности океанической коры.

Мало того, рассмотренный подход можно применить в планетологии для грубой оценки структуры космических объектов. Так, по анализу особенностей рельефа поверхности Венеры, полученному с помощью радарной съемки с ее искусственного спутника, с использованием такого подхода уже сделаны некоторые заключения относительно прошлого этой планеты.

Нет ничего удивительного в том, что зачастую одни и те же физические законы действуют в самых разнообразных системах. В нашем случае диапазон родственных явлений простирается от наноразмерного уровня до макроскопического и даже планетарного.

Итак, благодаря общности законов можно получать информацию о свойствах материалов, явлениях и процессах, например оценивать прочность материалов в нанослоях или судить об образовании рельефа на поверхности планет, происходящих в окружающем мире, обратившись к лабораторным моделям и взяв за аналог простой и хорошо изученный физический объект, такой как полимерная пленка с жестким нанометровым покрытием.

ПАМЯТИ ИЗРАИЛЯ МОИСЕЕВИЧА ГЕЛЬФАНДА

Не стало Израиля Моисеевича Гельфанда, одного из самых выдающихся математиков прошедшего века.

И.М.Гельфанд – поразительно разносторонний ученый. Нелегко назвать какую-либо из фундаментальных отраслей математики, в которой Гельфанд не имел бы основополагающих результатов. Он был всемирно признанным мировым лидером в функциональном анализе, теории групп Ли и теории представлений, и невозможно не отметить его вклада в алгебру, геометрию, топологию, алгебраическую геометрию, теорию дифференциальных уравнений, математическую физику, численный анализ, приложения к нефизическим наукам.

И.М.Гельфанд был воспитанником московской математической школы, учеником А.Н.Колмогорова. Он замыкает список учеников Лузина и первого поколения его выдающихся «внуков». Ими были Д.Е.Меньшов, М.Я.Суслин, А.Я.Хинчин, П.С.Александров, П.С.Урысон, Л.А.Люстерник, М.А.Лаврентьев, П.С.Новиков, Н.К.Бари, А.Н.Колмогоров, Л.В.Келдыш, Л.Г.Шнирельман, С.М.Никольский, А.Н.Тихонов, Л.С.Понтрягин, А.И.Мальцев, А.А.Ляпунов, М.В.Келдыш, И.М.Гельфанд.

В трудные двадцатые годы ему не довелось закончить школу. Он не получил высшего образования. С девятнадцати лет Израиль Моисеевич стал посещать семинары Московского университета и поступил в аспирантуру к Андрею Николаевичу Колмогорову. Кандидатскую диссертацию И.М.Гельфанд защитил в 1935 году и стал работать доцентом механико-математического факультета МГУ. Вскоре им были заложены основания теории нормированных колец (именуемых теперь банаховыми алгебрами). Эти исследования, послужившие основой его докторской диссертации, защищенной в 1940 году, сразу выдвинули его в число ведущих математиков своего времени. Гельфанд прочитал на механико-математическом факультете множество курсов: линейной алгебры, теории уравнений с частными производными, вариационного исчисления, интегральных уравнений. Он был блистательным лектором – многие называют его лучшим лектором среди тех, кого им доводилось слышать. Его перу принадлежит множество книг, по которым учились и продолжают учиться математики всего мира. Это учебник по линейной алгебре и написанные в соавторстве с коллегами учебник по вариационному исчислению и серия монографий по теории обобщенных функций. В течение полувека действовал знаменитый семинар Гельфанда, посвященный «всей математике», который послужил школой для многих поколений математиков. Долгое время Гельфанд работал в Отделении прикладной математики Математического института им.В.А.Стеклова, где выполнял работы большой государственной важности: он возглавлял группу ученых, которые проводили расчеты, связанные с созданием водородной бомбы. С шестидесятых годов Гельфанд заведовал лабораторией при Московском университете, где основное внимание уделялось проблемам медицины и биологии. Гельфанд был основателем и в течение многих лет главным редактором журнала «Функциональный анализ и его приложения». В годы, когда И.М.Гельфанд был президентом Московского математического общества, это общество достигло высшей степени своего развития.

Израиль Моисеевич Гельфанд (2.09.1913–5.10.2009)

Велики заслуги Израиля Моисеевича в области математического просвещения в нашей стране. Он был среди основателей школьных математических кружков при Московском университете, принимал активнейшее участие в проведении первых Московских математических олимпиад, основал Заочную математическую школу, был среди основателей знаменитой московской второй школы. Он был инициатором издания и основным соавтором многих замечательных брошюр, обращенных к школьникам. И.М.Гельфанд был другом нашего журнала. В первом номере «Кванта» за 1989 год опубликовано замечательное интервью с академиком И.М. Гельфандом.

И еще об одном нельзя не сказать: очень многим Израиль Моисеевич оказывал существеннейшую помощь в трудные минуты их жизни.

Поразительной особенностью его жизни в науке явилось невероятное творческое долголетие: его путь в науке на уровне высших достижений длился семьдесят пять лет. Сравнить его просто не с кем за всю историю науки.

В 2003 году в США состоялась конференция «Единство математики», приуроченная к девяностолетию И.М.Гельфанда. На конференции выступили с докладами крупнейшие математики нашего времени. На этой конференции 2 сентября, в день своего девяностолетия, выступил с докладом и сам юбиляр. Его доклад назывался «Математика как адекватный язык». В докладе были отражены суперсовременные проблемы алгебры, теории чисел, геометрии, анализа и прикладной математики. В начале доклада Израиль Моисеевич произнес такие слова:

«Я не ощущаю себя пророком. Я лишь ученик. (I do not consider myself a prophet. I am simply a student.) Всю жизнь я учился у великих математиков, таких как Эйлер или Гаусс, у моих старших и младших коллег, у моих друзей и сотрудников, но более всего – у моих учеников».

Имя Гельфанда навсегда останется в истории науки.

Вероятностные доказательства

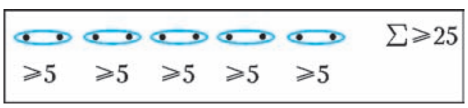
А.ШЕНЬ

Неравенства и оценки

Начнем с совсем простой задачи.

1. *На доске написаны 10 чисел. Сумма любых двух из них не меньше 5. Докажите, что сумма всех чисел не меньше 25.*

▷ Тут даже и доказывать-то особо нечего: разобьем числа на пять пар. В каждой паре сумма не меньше 5, всего получается 25. ◁



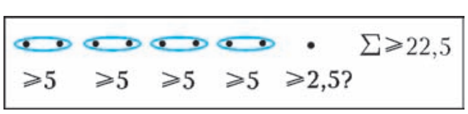
Теперь немного более сложная задача.

2. *На доске написаны 9 чисел. Сумма любых двух из них не меньше 5. Докажите, что сумма всех чисел не меньше 22,5.*

(Если все числа равны 2,5, то и получится 22,5.)

▷ Рассуждая аналогично предыдущей задаче, можно выбрать четыре пары, и одно число останется. В каждой паре сумма не меньше 5, всего 20. Если бы мы знали, что оставшееся без пары число не меньше 2,5, то мы получили бы требуемое. Но гарантировать это мы не можем. Скажем, если одно из чисел равно нулю, а остальные равны 5, то сумма любых двух будет не меньше 5 (а именно, 5 или 10). При этом непарным может оказаться ноль.

Наверное, вы уже сообразили, как завершить рассуждение. Разбиение на пары в наших руках, и мы можем оставить непарным любое из чисел. В любой паре хотя бы одно из чисел равно 2,5 или больше. Нам

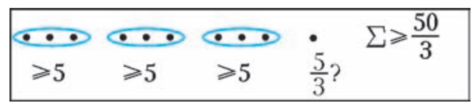


достаточно знать, что хотя бы одно из чисел таково – можно оставить непарным именно это число, и все получится. ◁

Усложним задачу еще немного.

3. *На доске написаны 10 чисел. Сумма любых трех из них не меньше 5. Докажите, что сумма всех чисел не меньше 50/3.*

▷ Используем тот же прием: в любой тройке чисел большее равно 5/3 или больше (иначе все три числа меньше 5/3, и сумма меньше 5). Возьмем одно из таких чисел (не меньших 5/3), останутся три тройки, в каждой из которых сумма не меньше 5. Всего получается как минимум $3 \cdot 5 + (5/3) = 50/3$. ◁



В двух предыдущих задачах оставалось одно число. А что будет, если останется два?

4. *На доске написаны 11 чисел. Сумма любых трех из них не меньше 5. Докажите, что сумма всех чисел не меньше 55/3.*

Можно решить эту задачу аналогично предыдущим (см. задачу 14 и указание к ней). Но мы приведем другое решение, которое обобщается на любые количества.

▷ Обозначим наши числа $a_1, \ldots, a_{11}$ и запишем их по кругу. Сумма любой тройки соседей не меньше 5 (по условию):

$$a_1 + a_2 + a_3 \geq 5,$$
$$a_2 + a_3 + a_4 \geq 5,$$
$$\ldots$$
$$a_9 + a_{10} + a_{11} \geq 5,$$
$$a_{10} + a_{11} + a_1 \geq 5,$$
$$a_{11} + a_1 + a_2 \geq 5.$$

Сложим эти одиннадцать неравенств. Каждое число встречается три раза (входит в три тройки), поэтому получится

$$3(a_1 + a_2 + \ldots + a_{11}) \geq 55,$$

откуда и следует требуемое. ◁

Вероятности и ожидания

Сейчас мы рассмотрим другое решение последней задачи – на языке теории вероятностей.

Пусть в ящике (или, как любят говорить в теории вероятностей, в урне) лежат 11 шаров, на которых написаны числа $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$. Мы вынимаем один из шаров не глядя, и нам дают столько рублей, сколько на нем написано.

Сколько мы будем выигрывать в среднем за игру, если играть много раз? Мы имеем в виду, что каждый раз вынутый шар возвращают в урну и ее содержимое перемешивают. Несложно сообразить, что ответ тут –

среднее арифметическое всех чисел,

$$S = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{11}}{11}.$$

В самом деле, пусть мы играем большое количество раз. Поскольку все шары на ощупь одинаковые и их перемешивают, то они будут попадаться нам одинаково часто. В $1/11$ доле всех игр нам попадется шар a_1, в $1/11$ доле – шар a_2 и так далее. Всего мы выиграем (за N игр)

$$\frac{N}{11}a_1 + \frac{N}{11}a_2 + \ldots + \frac{N}{11}a_{11},$$

и в среднем на одну игру придется как раз S. В теории вероятностей средний выигрыш за большое число игр называют *математическим ожиданием* выигрыша, так что в данной игре математическое ожидание выигрыша равно среднему арифметическому всех чисел.

А что будет, если разрешить команде из трех человек A, $Б$ и $В$ вынимать по шару? Мы имеем в виду, что шары вынимают без возвращения, так что в урне остается 8 шаров. Каково будет математическое ожидание выигрыша команды (средний выигрыш в расчете на одну игру)?

Ясно, что по-прежнему каждый из игроков будет вынимать все шары одинаково часто (ведь тот факт, что кто-то до тебя не глядя вынул шар, не меняет равенства шансов). Значит, каждый из игроков будет в среднем выигрывать S, а вся команда – в среднем $3S$.

Теперь вспомним условие задачи: сумма любых трех чисел не меньше 5. Значит, в каждой игре команда выигрывает не меньше 5, и средний выигрыш тоже не меньше 5. Таким образом,

$$3S = 3 \times \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{11}}{11} \geq 5,$$

поэтому $a_1 + a_2 + \ldots + a_{11} \geq 55/3$, что и требовалось доказать.

Это рассуждение выглядит нестрогим: что значит «большое число игр», «в среднем одинаково часто» и т.д.? Строгое обоснование дает математическая теория вероятностей, но оно выходит за рамки этой статьи. Мы, оставаясь на уровне правдоподобных нестрогих рассуждений, рассмотрим еще несколько подобных примеров.

Случайные расстановки

5. *В клетках шахматной доски 8×8 стоят плюсы и минусы, причем плюсов столько же, сколько минусов (по 32). Докажите, что можно так расставить 8 ладей, не бьющих друг друга, чтобы не меньше 4 ладей стояли на плюсах.*

▹ Будем ставить ладьи (пронумеруем их от 1 до 8) на доску случайным образом, считая равновероятными все расстановки, удовлетворяющие правилам (ладьи не бьют друг друга: на каждой вертикали и горизонтали их по одной).

Выберем какую-то одну из ладей. На какую клетку у нее больше шансов попасть: на a1 или, скажем, на e1? Одинаково, потому что в любой расстановке можно переставить вертикали a и e (вместе с ладьями, на них стоящими), и расстановки одного типа соответствуют расстановкам другого. По тем же причинам шансы попасть на e1 такие же, как, скажем, на e4 (переставляем первую и четвертую горизонтали). Аналогичные рассуждения показывают, что вообще у этой ладьи равные шансы попасть во все клетки доски.

Следовательно, у нее равные шансы попасть на плюс и на минус (по условию ровно половина клеток занята плюсами и половина минусами). Если за плюс ей дают рубль, а за минус отбирают, то в среднем ладья будет оставаться «при своих».

Теперь внимание: раз каждая ладья остается в среднем при своих, то и вся команда остается в среднем при своих. А если бы утверждение задачи было неверно (всегда больше ладей на минусах, чем на плюсах), то команда бы всегда проигрывала, а потому и в среднем бы проигрывала – противоречие. ◃

Случайные точки

6. *Известно, что более половины поверхности Земли занимают океаны. Используя из географии только этот факт, докажите, что можно найти две диаметрально противоположные точки, обе попавшие в океан.*

▹ Будем выбирать случайную точку поверхности Земли (или глобуса). Если делать это много раз, то больше чем в половине случаев выбранная точка A будет попадать в океан – она равномерно распределена по всей поверхности Земли, а океаны занимают больше половины.

Противоположная ей точка B тоже равномерно распределена по всей поверхности Земли и потому более чем в половине случаев попадает в океан. Значит, эти случаи (A в океане и B в океане) иногда должны происходить одновременно, что и требовалось доказать. ◃

Если это рассуждение кажется вам подозрительным (что значит «случайная равномерно распределенная по поверхности Земли точка»? почему доля случаев, в которых она попадает в океан, определяется долей океанов по площади?) – это не зря. Строгое его обоснование снова выходит за пределы этой статьи.

Однако по существу то же самое рассуждение можно изложить и без вероятностей. Пусть S – часть Земли, занятая океанами. Рассмотрим симметричную ей относительно центра Земли часть S'. (Она состоит из точек, у которых диаметрально противоположные попадают в океан.) Площади S и S' одинаковы (симметрия сохраняет площади). Если утверждение задачи неверно и общих точек у S и S' нет, то получается противоречие: две непересекающиеся части сферы содержат более 50% площади каждая.

В следующей задаче такой простой перевод рассуждения на язык площадей невозможен.

7. *На белой сфере есть черное пятно, занимающее не более 10% ее площади. Покажите, что можно вписать куб в сферу таким образом, чтобы ни одна его вершина не попала в это пятно.*

▹ Возьмем куб $ABCDA'B'C'D'$ (надлежащего размера) и будем вписывать его в сферу случайным образом. При большом количестве испытаний доля случаев, когда вершина A попадает в пятно (вероятность события «A черная») равна $1/10$, поскольку вершина A равномерно распределена по всей сфере.

По тем же причинам вершина B оказывается черной в 10% случаев, и то же самое можно сказать про любую из 8 вершин. Значит, остается как минимум $20\% = 100\% - 80\%$ случаев, в которых все вершины белые (может быть больше за счет случаев, когда несколько вершин черные). Поэтому куб можно вписать требуемым способом. ◁

На самом деле тут мы уже серьезно жульничаем и заметаем под ковер основную часть рассуждения: почему слова «случайно вписанный куб» имеют смысл и почему вершина равномерно распределена по сфере. Интуитивно это выглядит правдоподобно и действительно может быть строго обосновано (хотя я не знаю никакого решения этой задачи в рамках школьной программы).

Случайные раскраски

Рассмотрим произвольный *граф* – несколько точек (*вершин*), соединенных линиями (*ребрами*). Раскрасим вершины графа в два цвета (скажем, черный и белый). Ребро назовем *разноцветным*, если оно (как вы уже догадались) соединяет вершины разных цветов.

Количество разноцветных ребер зависит от раскраски. Если мы хотим сделать это число минимальным, нет ничего проще – достаточно покрасить все вершины в один и тот же цвет. А что будет, если мы хотим сделать его максимальным (для данного графа)? Ответ зависит от графа, но оказывается, что всегда можно гарантировать как минимум половину разноцветных ребер.

8. *Докажите, что в произвольном графе можно раскрасить вершины в два цвета таким образом, чтобы как минимум половина ребер оказались разноцветными.*

▷ Будем раскрашивать вершины случайным образом (для графа с n вершинами возможно 2^n раскрасок, и мы считаем все их равновероятными). Для каждой раскраски посчитаем, сколько ребер окажутся разноцветными. Это, как говорят, «случайная величина» – она зависит от выбора раскраски.

Каково ее математическое ожидание (среднее значение при большом числе испытаний)? Другими словами, пусть в каждой вершине графа бросают монету (независимо от других вершин, так что все комбинации равновероятны), а на каждом ребре дежурит игрок, который получает рубль, если ребро окажется разноцветным (монеты в его концах выпадут по-разному). Сколько в среднем будут зарабатывать игроки за игру?

Каждый игрок в среднем выигрывает в половине игр (есть четыре варианта комбинации цветов на концах ребра, и в двух из них оно разноцветное). Значит, каждый игрок в среднем выигрывает полтинник за игру, а вся команда в среднем выигрывает $V/2$ рублей, где V – число ребер.

Отсюда очевидно следует, что есть раскраски, когда не менее половины ребер разноцветные (иначе бы в каждой игре команда выигрывала меньше $V/2$, и среднее тоже было бы меньше $V/2$). ◁

На самом деле это утверждение имеет простое конструктивное доказательство (см. задачу 19).

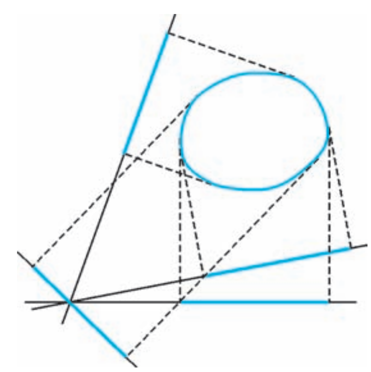
Случайные проекции

В этом разделе мы применим вероятностные соображения для решения такой задачи.

9. *На плоскости нарисована выпуклая фигура, ограниченная кривой длины L. Докажите, что ее диаметр, т.е. максимальное расстояние между двумя ее точками, не меньше L/π.*

Появление здесь числа π не случайно: неравенство задачи обращается в равенство для случая окружности диаметра $D = L/\pi$.

▷ Мы докажем более сильное утверждение: средняя длина проекции нашей фигуры на случайное направление равна L/π. (Мы проводим прямую в случайно выбранном направлении, и потом из каждой точки фигуры опускаем перпендикуляр на эту прямую. Получается отрезок – проекция фигуры на прямую.)



Из этого утверждения следует, что найдется направление, проекция на которое имеет длину не меньше L/π (среднее значение не может быть больше всех). А тогда и точки фигуры, которые попадают в концы проекции, находятся на таком же или большем расстоянии (наклонная длиннее перпендикуляра).

Как же доказать обещанное? Рассмотрим кривую, ограничивающую фигуру. Проекция фигуры – это все равно что проекция ее границы. Разобьем эту кривую на множество очень маленьких частей – настолько маленьких, что каждую из них можно считать отрезком. Пусть все эти отрезки будут равной длины.

Проекция всей границы складывается из проекций этих отрезков. Точнее, удвоенная проекция всей границы равна сумме проекций отрезков (так как они покрывают ее два раза – туда и обратно).

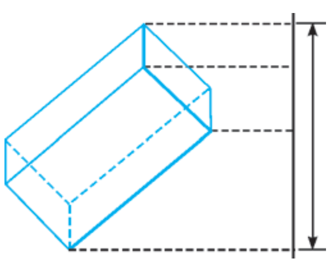
Это верно для любого направления проектирования – значит, и удвоенная *средняя* длина проекции фигуры равна сумме средних длин проекций каждого из отрезков, составляющих ее границу. Но отрезки эти равной длины, и потому средние длины их проекций одинаковы (поскольку мы проектируем на случайное направление, то направление самого отрезка роли не играет). Значит, средняя длина проекции кривой зависит только от числа этих отрезков, т.е. пропорциональна длине кривой, и коэффициент пропорциональности можно вычислять на примере окружности. ◁

Две коробки

10. *В московском метро можно провозить коробки, у которых сумма измерений (длины, ширины и высоты) не превосходит некоторой границы. Возникает вопрос: можно ли перехитрить правила, поместив одну коробку внутрь другой? Другими словами, пусть один прямоугольный параллелепипед целиком содержится внутри другого. Может ли сумма измерений внутреннего быть больше суммы измерений внешнего?*

▷ Оказывается, что нет, но доказать это не так просто. Есть несколько красивых доказательств, и одно из них использует вероятностные соображения (примерно такие же, как в предыдущем разделе).

Будем проектировать коробку на прямую случайно выбранного направления (в пространстве). Из картинки видно, что проекция коробки складывается из проекции трех отрезков, идущих по ее высоте, длине и ширине. Следовательно, средняя длина проекции (математическое ожидание) равно сумме средних длин проекций этих отрезков. А средняя длина проекции отрезка пропорциональна его собственной длине (с каким-то коэффициентом, нам сейчас не важно – с каким). Поэтому средняя длина проекции коробки пропорциональна сумме ее измерений.



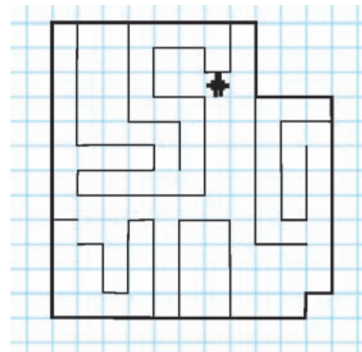
Теперь представим себе две коробки, одну внутри другой. На какую прямую их ни проектируй, проекция внутренней коробки всегда находится внутри проекции внешней и потому имеет меньшую или равную длину. Значит, и средние длины проекций находятся в том же соотношении, а они пропорциональны сумме измерений. ◁

Случайные блуждания

11. *На листке из тетрадки в клеточку нарисован лабиринт и в нем робот, который по командам «вверх», «вниз», «влево» и «вправо» ходит из клетки в клетку. Стены лабиринта идут по сторонам клеток, выхода из лабиринта нет. Если, начав двигаться по команде, робот упирается в стену, то он остается на месте. Мы не знаем, какой лабиринт нарисован, но знаем размер листка, измеренный в клеточках. Докажите, что можно составить последовательность команд, которая гарантирует, что робот побывает во всех клетках доступной ему части лабиринта.*

▷ Сразу же признаемся, что не только наше рассуждение будет чистым доказательством существования (без предъявления способа построения такой последовательности), но и длина такой последовательности будет астрономической.

Будем давать роботу случайные команды и смотреть,



с какой вероятностью он обойдет лабиринт. Пусть в лабиринте есть замкнутый обход из не более чем N шагов. Тогда при любом начальном положении робота есть некоторая вероятность, что при подаче ему N случайных команд он пойдет как раз по этому пути и обойдет лабиринт. Она не меньше 4^{-N}, а вероятность не обойти лабиринт не больше $\left(1-4^{-N}\right)$. Процесс можно повторять: если мы дадим $2N$ случайных команд, то вероятность *не* обойти лабиринт не больше $\left(1-4^{-N}\right)^2$ (неудача на первом этапе происходит в доле $\left(1-4^{-N}\right)$ случаев или меньше, и в каждом из них вероятность сокращается во столько же раз за счет второго этапа).

Вообще, после Nk случайных команд вероятность неудачи (в данном лабиринте с данным начальным положением) не больше $\left(1-4^{-N}\right)^k$.

Хотя основание степени и близко к единице, но все равно это число можно сделать сколь угодно малым, увеличивая k. Заметим, что для всех лабиринтов на доске данного размера можно выбрать одно общее N. После этого возьмем k таким, чтобы $\left(1-4^{-N}\right)^k$ стало меньше $1/M$, где M – число разных способов нарисовать лабиринт и робота внутри него (на листке бумаги данного размера их конечное число). Тогда для каждого из M вариантов расположения вероятность неудачи меньше $1/M$, и потому с положительной вероятностью последовательность команд длины Nk окажется удачной для всех вариантов. Значит, такая удачная последовательность существует, что и требовалось доказать. ◁

Несравнимые множества

В этом разделе мы предполагаем знакомство с элементами комбинаторики (множества, подмножества, число сочетаний).

12. *Пусть A – множество из $2n$ элементов. Мы хотим выбрать несколько подмножеств множества A, причем требуется, чтобы они были несравнимы: ни одно из них не должно быть подмножеством другого. Какое максимальное число подмножеств можно выбрать?*

▷ Заметим, что требование выполняется, если все выбранные подмножества одного размера (и разные). Чтобы их число было максимальным, надо взять размер n, поскольку число сочетаний C_{2n}^k при данном n

максимально при $k = n$. Это следует из формулы $C_v^u = v!/(u!(v-u)!)$. Но можно это объяснить и без формул: из k-элементного подмножества можно получить $(k+1)$-элементное, добавив любой из оставшихся $2n - k$ элементов, при этом каждое $(k+1)$-элементное множество получится $k+1$ раз, так что

$$\frac{C_{2n}^{k+1}}{C_{2n}^{k}} = \frac{2n-k}{k+1},$$

и это отношение больше 1, когда $2n - k > k + 1$, т.е. $k < n - 1/2$.

Таким образом, если брать подмножества одинакового размера, то наилучший вариант получится, если взять C_{2n}^n подмножеств размера n. Остается доказать – и это самое трудное, – что даже если брать множества разных размеров, то ничего лучшего не найдется.

Рассмотрим следующий случайный процесс: начав с пустого множества, мы добавляем элементы множества A в случайном порядке, пока не получится все множество A. Пусть X – некоторое подмножество множества A. Какова вероятность того, что мы в ходе этого процесса пройдем через X (в какой-то момент будут добавлены все элементы X и только они)?

Легко сообразить, что она равна $1/C_{2n}^k$, где k – число элементов в X. В самом деле, в ходе добавления элементов мы пройдем ровно через одно k-элементное множество (после k шагов), и все k-элементные множества равновероятны (симметрия). Таких множеств C_{2n}^k, значит, каждое из них появляется в $1/C_{2n}^k$ доле случаев (имеет вероятность $1/C_{2n}^k$).

Пусть теперь мы выбрали какое-то количество подмножеств (не обязательно одинакового размера), соблюдая требования задачи (никакие два выбранных подмножества не сравнимы). Для каждого из выбранных подмножеств вероятность пройти через него равна $1/C_{2n}^k$, что, как мы знаем, не меньше $1/C_{2n}^n$. С другой стороны, события эти, как говорят, «несовместны»: не может быть так, что в ходе добавления элементов мы сначала получим одно выбранное подмножество, а потом другое (они ведь несравнимы). Поэтому сумма вероятностей этих событий не больше 1, и потому количество событий, т.е. количество выбранных подмножеств, не больше C_{2n}^n, что и требовалось доказать. ◁

Еще несколько задач

13. Среди любых трех участников математического кружка есть хотя бы одна девочка. Сколько мальчиков может быть в этом кружке?

14. Решите задачу 4 аналогично предыдущим (задачи 1, 2).

Указание. Докажите, что если сумма трех чисел равна 5, то сумма некоторых двух из них не меньше $10/3$. То же самое верно, если сумма трех чисел больше 5.

15. Сделайте рассуждение раздела «Вероятности и ожидания» строгим, рассмотрев случай, когда все комбинации из трех шаров были вытащены по одному разу.

16. Покажите, что можно найти 8 расстановок ладей на шахматной доске, которые вместе используют все 64 клетки доски (по одному разу каждую). Используя этот факт, дайте другое решение задачи 5.

17. Не используя вероятностей, докажите такой ослабленный вариант утверждения задачи 7: если черное пятно занимает 10% площади сферы, то в нее можно вписать *прямоугольный параллелепипед*, у которого все вершины попадают в белые точки.

Указание. Проведем координатные плоскости, которые делят сферу на 8 равных частей. Будем искать параллелепипед, стороны которого параллельны осям координат. Он задается одной из своих вершин, и она не должна попасть в восемь множеств площади $1/10$.

18. Докажите, что для данного графа существует раскраска, делающая все его ребра разноцветными, если и только если в этом графе нет циклов нечетной длины (нельзя вернуться в исходную вершину, нечетное число раз пройдя по ребрам).

19. Придумайте конструктивное решение задачи 8 (способ раскраски, который гарантирует, что разноцветных ребер будет не меньше половины).

Указание. Красим вершины по очереди «жадным алгоритмом» – каждая следующая красится так, чтобы число разноцветных ребер максимально увеличивалось.

20. Вершины графа с V ребрами разрешим красить в три цвета. Докажите. что можно найти раскраску с $2V/3$ или более разноцветными ребрами.

21. На листок в линейку случайно бросают иглу, длина которой равна расстоянию между линейками. Докажите, что она пересечет одну из линеек с вероятностью $2/\pi$.

Указание. Математическое ожидание числа пересечений зависит (пропорционально) от длины иглы, но не от ее формы, а коэффициент пропорциональности можно найти на примере окружности.

22. Несамопересекающаяся кривая длины 22 находится внутри круга радиуса 1. Докажите, что найдется прямая, имеющая с этой кривой по крайней мере 8 общих точек.

23. На кальке нарисована фигура площади 2,5. Докажите, что кальку можно так положить на клетчатую бумагу (со стороной клетки 1), что фигура покроет не менее трех узлов сетки. Докажите, что можно положить кальку так, чтобы фигура покрыла не более двух узлов сетки.

24. Рассмотрим R-окрестность прямоугольной коробки (все точки, которые находятся на расстоянии не более R хотя бы от одной из точек коробки; внутренность коробки также включаем в ее окрестность).

а) Покажите, что объем этой окрестности можно найти по формуле

$$V + S \cdot R + L \cdot \pi R^2 + \frac{4}{3}\pi R^3,$$

где V – объем коробки, S – площадь ее поверхности, L – сумма ее измерений.

б) Если одна коробка находится внутри другой, то и R-окрестность первой находится внутри R-окрестности второй. Сравнив их объемы при больших R, покажите, что сумма измерений внутренней коробки не больше суммы измерений внешней (задача 10).

25. Решите задачу 11, не используя вероятностных соображений.

Указание. Рассмотрим все возможные лабиринты и расположения робота по очереди. Выберем какой-то первый вариант и напишем соответствующую последовательность. (Если этот вариант осуществится на самом деле, то нам повезло.) Для второго варианта эта последовательность (вообще говоря) не годится, но тем не менее посмотрим, куда она приводит, и допишем то, что нужно, чтобы обойти лабиринт второго типа. И так далее.

26. Какое максимальное число несравнимых подмножеств можно выбрать в $(2n+1)$-элементном множестве?

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 марта 2010 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №6–2009» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2154» или «Ф2160». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvant.info и phys@kvant.info соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2158 и М2160 предлагались на L Международной математической олимпиаде.

Задачи М2154–М2160, Ф2160–Ф2167

М2154. Каждая клетка доски размером 2009×2009 покрашена в один из двух цветов так, что у каждой клетки соседей (по стороне) своего цвета меньше, чем соседей другого цвета. Какое наибольшее значение может принимать разность между количеством клеток одного и другого цветов?

А.Шаповалов

М2155. Найдите 2009-значное число, отношение которого к сумме его цифр минимально.

И.Богданов

М2156. Вася и Петя нарисовали по выпуклому четырехугольнику. Каждый из них записал на листочке длины всех сторон своего четырехугольника и двух его диагоналей. В результате на их листочках оказались два одинаковых набора из 6 различных чисел. Обязательно ли четырехугольники Васи и Пети равны?

Н.Агаханов, И.Богданов

М2157. На доске выписано 20 делителей числа 70!. Докажите, что можно стереть некоторые из них так, чтобы произведение оставшихся являлось полным квадратом.

Фольклор

М2158. Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC. Пусть P и Q – внутренние точки отрезков CA и AB соответственно. Точки K, L и M – середины отрезков BP, CQ и PQ соответственно, а Γ – окружность, проходящая через точки K, L и M. Известно, что прямая PQ касается окружности Γ. Докажите, что $OP = OQ$.

С.Берлов

М2159*. Найдите все такие пары чисел (k, c), где k – натуральное, что для всех натуральных n, кроме, быть может, конечного их числа, число $n(n+1)\ldots(n+k-1)+c$ является точной степенью (большей 1 и, возможно, зависящей от n) натурального числа.

В.Сендеров

М2160*. Даны попарно различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а также множество M, состоящее из $n-1$ числа, но не содержащее число $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Кузнечик должен сделать n прыжков вправо по числовой прямой, стартуя из точки с координатой 0. При этом длины его прыжков должны равняться числам $a_1, a_2, \ldots, a_n$, взятым в некотором порядке. Докажите, что этот порядок можно выбрать таким образом, чтобы кузнечик ни разу не приземлился в точке, имеющей координату из множества M.

Д.Храмцов, К.Рейер

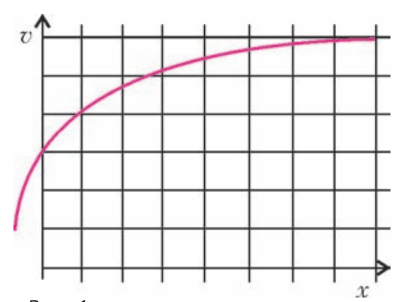


Рис. 1

Ф2160. На графике (рис.1) приведена зависимость скорости точки, которая движется по оси координат X, от ее координаты. Найдите ускорение точки в начале координатной оси и время прохождения первых пяти метров. Одна клетка по горизонтальной оси – это 1 м, по вертикальной оси – это 1 м/с.

З.Точкин

Ф2161. Статуэтка школьника имеет массу 20 г, голова статуэтки сделана из серебра (плотность 12 г/см^3), остальное – из дерева (плотность 0,8 г/см^3). Известно, что фигурка не содержит полостей и не тонет в воде. Один грамм дерева стоит 1 рубль, один грамм серебра стоит 100 рублей. Сколько может стоить эта фигурка? *Справка*: данная статуэтка художественной ценности не имеет, ее стоимость равна стоимости материалов.

А.Несложнов

Ф2162. В горизонтально расположенном цилиндрическом сосуде находится порция гелия, отделенная от окружающей среды массивным поршнем, который может двигаться без трения. Наружное давление очень быстро повышают в 3 раза. Во сколько раз уменьшится объем газа к тому моменту, когда поршень окончательно перестанет двигаться?

А.Повторов

Ф2163. В глубинах космоса, вдали от других тел и полей неподвижно висит непроводящее тонкое кольцо радиусом R и массой M, равномерно заряженное по длине зарядом Q. Заряженное таким же зарядом маленькое тело массой m движется вдоль оси кольца, причем на большом расстоянии от кольца скорость тела направлена к кольцу и равна v_0. Найдите максимальную скорость кольца.

А.Зильберман

Ф2164. В однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ влетает со скоростью $\vec{v}$ частица массой m и зарядом q. Магнитное поле локализовано внутри области радиусом R_0, скорость $\vec{v}$ направлена перпендикулярно линиям магнитной индукции, прицельный параметр удара p (рис.2). Найдите угол рассеяния θ, т.е. угол, на который частица отклоняется от первоначального направления после прохождения магнитного поля.

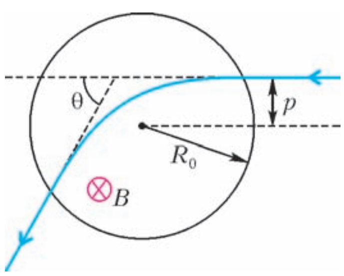


Рис. 2

Ю.Носов

Ф2165. Вольтметр и миллиамперметр соединили последовательно и подключили к батарейке. При этом показания приборов были 1,3 В и 0,5 мА. Теперь соединили последовательно два таких же вольтметра и тот же миллиамперметр и подключили к той же батарейке – один из вольтметров показал 0,7 В. Что показывают при этом остальные два прибора? А что покажут приборы, если количество вольтметров увеличить до трех? Напряжение батарейки постоянно.

А.Простов

Ф2166. DVD-диск вращается очень быстро. Оцените скорость движения точки поверхности диска мимо считывающего устройства, если за 100 секунд считывается 100 миллионов бит информации. Дорожки, на которых записана информация, расположены очень близко друг к другу – расстояние между соседними дорожками составляет примерно $1/1000$ миллиметра.

Р.Цифров

Ф2167. В фокус маленькой собирающей линзы помещают мощный точечный источник света, при этом на линзу действует очень маленькая сила F. Какой станет эта сила, если источник отодвинуть вдвое дальше? А втрое дальше? Диаметр линзы в 10 раз меньше ее фокусного расстояния.

А.Линзов

Решения задач М2131–М2138, Ф2145–Ф2152

М2131. *Пусть a^b обозначает число a^b. В выражении 7^7^7^7^7^7^7 надо расставить скобки, чтобы определить порядок действий (всего будет 5 пар скобок). Можно ли расставить эти скобки двумя разными способами так, чтобы получилось одно и то же число?*

Ответ: можно.

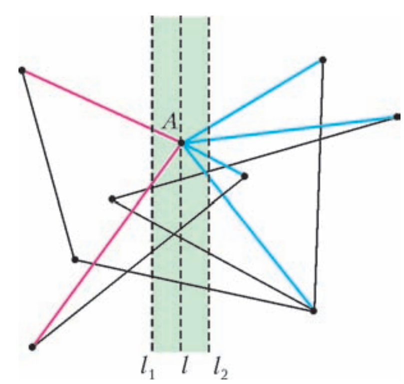
Заметим, что $\left(7^\wedge\left(7^\wedge7\right)\right)^\wedge7=\left(7^\wedge7\right)^\wedge\left(7^\wedge7\right)$ в силу тождества $\left(7^a\right)^b=\left(7^b\right)^a$. Теперь легко привести пример (конечно, он не единственный), удовлетворяющий условию:

$$\left(\left(7^\wedge(7^\wedge7)\right)^\wedge7\right)^\wedge\left(7^\wedge(7^\wedge7)\right)=\left((7^\wedge7)^\wedge(7^\wedge7)\right)^\wedge\left(7^\wedge(7^\wedge7)\right).$$

А.Толпыго

М2132. *На плоскости даны несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Некоторые точки соединены отрезками. Известно, что любая прямая, не проходящая через данные точки, пересекает четное число отрезков. Докажите, что из каждой точки выходит четное число отрезков.*

Рассмотрим одну из данных точек – точку A. Пусть из нее выходит a отрезков. Возьмем прямую l, проходящую через A и не параллельную ни одной из прямых, соединяющих пары данных точек; будем считать, что l направлена вертикально. Небольшим сдвигом прямой l влево и вправо получим такие прямые l_1 и l_2 (параллельные l), что в полосе между ними нет ни одной данной точки, за исключением точки A (см. рисунок).



Пусть прямая l_1 пересекает x отрезков, выходящих из точки A. Тогда прямая l_2 пересекает $a-x$ отрезков, выходящих из точки A, поскольку каждый отрезок, выходящий из точки A, пересекается ровно с одной из прямых l_1, l_2. Каждый отрезок, соединяющий две данные точки, отличные от A, либо пересекает обе прямые l_1, l_2, либо не пересекает ни одну из них. Поэтому количества отрезков, пересекаемых прямыми l_1 и l_2, отличаются на $x-(a-x)=2x-a$. По условию задачи, это число должно быть четным. Значит, a – четное число, что и требовалось доказать.

И.Богданов, Г.Гальперин

М2133. *Замок обнесен круговой стеной с девятью башнями, на которых дежурят рыцари. По истечении каждого часа все они переходят на соседние башни, причем каждый рыцарь движется либо все время по часовой стрелке, либо против. За ночь каждый рыцарь успевает подежурить на каждой башне. Известно, что был час, когда на каждой башне дежурили хотя бы два рыцаря, и был час, когда ровно на 5 башнях дежурили ровно по одному рыцарю. Докажите, что был час, когда на одной из башен вообще не было рыцарей.*

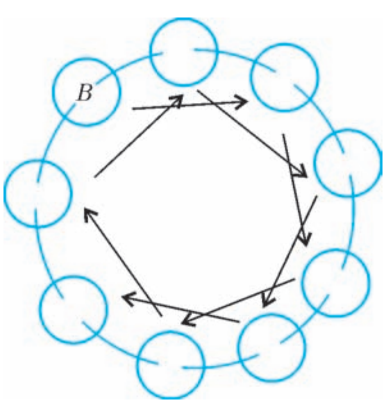
Разделим рыцарей на два отряда: в первый отряд включим всех рыцарей, двигающихся по часовой стрелке, а во второй – двигающихся против часовой стрелки. Можно считать, что рыцари второго отряда стоят на месте, а каждый рыцарь первого отряда через каждый час сдвигается на две башни по часовой стрелке.

Предположим, что на каждой башне дежурит хотя бы по одному рыцарю второго отряда. Тогда в момент, когда на некоторых пяти башнях дежурили по одному рыцарю (это рыцари второго отряда), рыцари первого отряда занимали не более четырех башен. Значит, и в любой другой момент рыцари первого отряда занимают не более четырех башен, следовательно, в любой момент хотя бы на одной из рассматриваемых пяти башен остается ровно один рыцарь второго отряда. Это противоречит условию.

Аналогично, предположив, что на каждой башне дежурит хотя бы по одному рыцарю первого отряда, приходим к противоречию (при этом удобнее считать рыцарей первого отряда неподвижными).

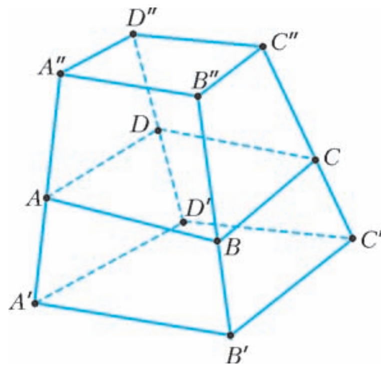
Итак, есть башня A (фиксированная), на которой нет рыцарей второго отряда; кроме того, в любой момент есть башня B, на которой нет рыцарей первого отряда, причем положение башни B сдвигается на две башни по часовой стрелке. По условию, положение башни B (вместе с рыцарями первого отряда) сдвинется не менее восьми раз и (поскольку 9 – нечетное число) пройдет все башни (см. рисунок). Следовательно, в какой-то момент положение башни B совпало с башней A. Это означает, что в следующий час на башне A не дежурит ни один рыцарь.

М.Мурашкин



М2134. *Три плоскости разрезают параллелепипед на восемь шестигранников, все грани которых – четырехугольники (каждая плоскость пересекает свои две пары противоположных граней параллелепипеда и не пересекает две оставшиеся грани). Известно, что вокруг одного из этих шестигранников можно описать сферу. Докажите, что и вокруг каждого из них можно описать сферу.*

Рассмотрим два из восьми шестигранников $ABCDA'B'C'D'$ и $ABCDA''B''C''D''$, имеющих общую грань (см. рисунок). Пусть известно, что вокруг шестигранника $ABCDA'B'C'D'$ можно описать сферу. Докажем, что вокруг шестигранника $ABCDA''B''C''D''$ также можно описать сферу.



Четырехугольник $ABCD$ вписан в некоторую окружность ω, четырехугольники $ABB'A'$, $BCC'B'$ и т.д. также вписанные. По условию, плоскости $A'B'C'D'$ и $A''B''C''D''$ параллельны, поэтому $A'B' \parallel A''B''$, $B'C' \parallel B''C''$, и т.д. Из параллельности $A'B' \parallel A''B''$ и вписанности четырехугольника $ABB'A'$ имеем

$$\angle AA''B'' + \angle ABB'' = (180^\circ - \angle AA'B') + (180^\circ - \angle ABB') =$$

$$= 360^\circ - (\angle AA'B' + \angle ABB') = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ,$$

поэтому четырехугольник $ABB''A''$ вписан в некоторую окружность ω_1. Аналогично доказываем, что четырехугольники $BCC''B''$, $CDD''C''$, $DAA''D''$ вписаны в некоторые окружности ω_2, ω_3, ω_4. Проведем сферу S через окружность ω и точку A''. Так как сфера S содержит точки A, B и A'', то ее сечение плоскостью ABA'' – это окружность ω_1. Таким образом, сфера S содержит окружность ω_1, а следовательно, содержит точку B''. Зная, что сфера S содержит точку B'', доказываем (аналогично предыдущему), что она содержит окружность ω_2 и, значит, точку C''. Наконец, зная, что сфера S содержит точку C'', доказываем, что она содержит точку D''. Итак, шестигранник $ABCDA''B''C''D''$ вписан в сферу S.

Точно так же, переходя от шестигранников, про которые уже известно, что они вписанные, к соседним по грани, докажем, что все шестигранники вписанные.

П.Кожевников

М2135. *Натуральное число называется хорошим, если из него можно получить полный квадрат, приписав к его десятичной записи слева некоторое число, оканчивающееся ровно на 2009 нулей. Для каких n* *существует n-значное хорошее число, которое не является полным квадратом?*

Ответ: для всех натуральных $n \geq 2$.

Квадрат числа может оканчиваться только на 0, 1, 4, 5, 6, 9, однако не может оканчиваться на 05 (иначе делится на 5, но не делится на 25) и на 06 (иначе делится на 2, но не делится на 4), поэтому однозначных хороших чисел не существует.

Назовем *k-хвостом* числа A число, образованное последними k цифрами числа A. Покажем, что при $n \geq 2$ существует полный квадрат, $(n+2009)$-хвост которого имеет вид $\underbrace{000\ldots00}_{2009\text{ нулей}}4\underbrace{00\ldots0}_{n-2\text{ нуля}}1$, а $(n+2010)$-я справа цифра нечетна (и тем самым отлична от нуля). Отсюда будет сразу следовать, что n-значное число $4\underbrace{00\ldots0}_{n-2\text{ нуля}}1$ – хорошее. Это завершит решение, так как $4\underbrace{00\ldots0}_{n-2\text{ нуля}}1$ не является полным квадратом (поскольку дает остаток 2 при делении на 3).

Лемма. *Пусть $k \geq 2$ и A – квадрат числа a, оканчивающегося на 1, причем в $(k+1)$-м справа разряде числа A находится четная цифра t. Тогда найдется квадрат D числа d, оканчивающегося на 1, такой, что k-хвост числа D совпадает с k-хвостом числа A и, кроме того, у числа D в $(k+1)$-м справа разряде находится ноль, а в $(k+2)$-м справа разряде: а) четная цифра; б) нечетная цифра.*

Доказательство. Пусть $a = 10m + 1$. Положим $d = a + x \cdot 10^k$. Тогда

$$D = d^2 = A + 2ax \cdot 10^k + x^2 \cdot 10^{2k} = A + 2mx \cdot 10^{k+1} + 2x \cdot 10^k + x^2 \cdot 10^{2k}.$$

Три последних слагаемых не меняют k-хвост числа A, причем последнее слагаемое не меняет $(k+2)$-хвост числа, а слагаемое $2mx \cdot 10^{k+1}$ в $(k+2)$-хвосте может изменить лишь $(k+2)$-ю справа цифру, не меняя ее четности (если в числе A отсутствует $(k+2)$-я справа цифра, считаем ее четной).

Если взять $x \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ такое, что $2x+t$ делится на 10, то слагаемое $2x \cdot 10^k$ изменяет в числе A $(k+1)$-ю справа цифру с t на 0. При этом если $x \in \{1,2,3,4,5\}$, то $2x+t = 10$, и слагаемое $2x \cdot 10^k$ изменяет в числе A четность $(k+2)$-й справа цифры; если же $x \in \{6,7,8,9,0\}$, то $2x+t$ равно 20 или 0, и слагаемое $2x \cdot 10^k$ не меняет четности $(k+2)$-й справа цифры. Таким образом, выбором x можем одновременно сделать $(k+1)$-ю справа цифру нулевой и сделать $(k+2)$-ю справа цифру как четной, так и нечетной. Лемма доказана.

Возьмем полный квадрат $2\underbrace{00\ldots0}_{n-2\text{ нуля}}1^2$, n-хвост которого равен $4\underbrace{00\ldots0}_{n-2\text{ нуля}}1$, а $(n+1)$-я цифра справа четная (0 или 4). Последовательно применяя утверждение а) леммы для $k = n, n+1, n+2, \ldots, n+2007$, а затем утверждение б) леммы для $k = n+2008$, приходим к нужному примеру полного квадрата.

Н.Агаханов, В.Сендеров

М2136. *Пусть C_n^k обозначает количество способов выбрать k предметов из n различных предметов (способы, отличающиеся только порядком выбора предметов, считаются одинаковыми). Докажите, что если натуральные числа k и l меньше n, то числа C_n^k и C_n^l имеют общий множитель, больший 1.*

Можно считать, что k и l различны (иначе задача очевидна). Заметим, что $C_n^i = C_n^{n-i}$ (выбрать i предметов из n – то же самое, что не выбрать остальные $n-i$). Поэтому можно также считать, что и k, и l не превосходят $n/2$.

Решим такую комбинаторную задачу. *Сколькими способами можно заполнить два мешка, в первый из которых вмещается k предметов, а во второй l предметов, если для этого у нас есть n различных предметов, $n \geq k + l$?* (Уточним: порядок, в котором предметы свалены в данный мешок, не важен – важно только множество предметов, находящихся в данном мешке.) Ясно, что ответ в этой задаче: $C_n^k \cdot C_{n-k}^l$ – заполняем сначала первый мешок k предметами (из данных n), и для каждого такого заполнения еще заполняем второй мешок l предметами (из оставшихся $n-k$). Но, аналогично, ответом в этой задаче будет также число $C_n^l \cdot C_{n-l}^k$. Так как ответ тут может быть только один, мы доказали тождество

$$C_n^k \cdot C_{n-k}^l = C_n^l \cdot C_{n-l}^k. \qquad (*)$$

Из тождества следует, что C_n^l делит произведение $C_n^k \cdot C_{n-k}^l$. Но если C_n^k и C_n^l взаимно просты, то тогда C_n^l делит второй сомножитель, т.е. C_{n-k}^l. Это невозможно, так как, очевидно, $C_n^l > C_{n-k}^l$. Значит, C_n^k и C_n^l не могут быть взаимно простыми, что и требовалось доказать.

Замечание. Само равенство $(*)$ можно доказать непосредственно, используя формулу $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)}$.

С.Дориченко

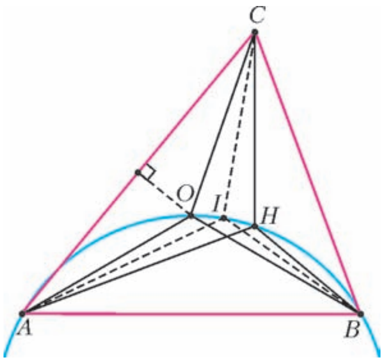
М2137. *Дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC, в котором точка H – точка пересечения высот, точки I и O – центры вписанной и описанной окружностей. Известно, что точки A, O, I, H лежат на одной окружности ω. Докажите, что окружность ω проходит через одну из вершин B и C.*

Заметим, что лучи AH и AO симметричны относительно биссектрисы AI угла BAC. Действительно,

$$\angle BAH = 90° - \angle ABC = 90° - \frac{\angle AOC}{2} = \angle CAO.$$

Поэтому AI – биссектриса угла HAO. Значит, дуги HI и OI окружности ω равны, следовательно, отрезки HI и OI равны.

Аналогично предыдущему, лучи BH и BO симметричны относительно биссектрисы BI угла ABC. В треугольниках BIO и BIH сторона BI общая, $OI = HI$ и $\angle IBH = \angle IBO$. Применив теорему синусов, получаем, что либо углы BHI и BOI равны, либо составляют в сумме $180°$. В первом случае треугольники BIO и BIH равны и симметричны относительно прямой BI,



значит, $HO \perp BI$. Во втором случае получаем, что точки B, H, I, O лежат на одной окружности, т.е. окружность ω проходит через вершину B (см. рисунок).

Проведя те же самые рассуждения для вершины C, получаем, что либо $HO \perp CI$, либо окружность ω проходит через вершину C.

Поскольку прямая HO не может быть одновременно перпендикулярна биссектрисам BI и CI, то одна из вершин B и C лежит на ω, что и требовалось доказать.

Замечание. Нетрудно убедиться, что в треугольнике ABC (не обязательно остроугольном) эквивалентны следующие условия: $\angle ABC = 60°$; точки A, C, H, I и O лежат на одной окружности; *прямая Эйлера* HO перпендикулярна биссектрисе угла B. Условие же равенства отрезков HI и OI эквивалентно равенству $60°$ одного из углов треугольника ABC.

П.Кожевников

М2138*. *В ячейку памяти компьютера записали число 6. Далее компьютер делает миллион шагов. На шаге номер n он увеличивает число в ячейке на наибольший общий делитель этого числа и n. Докажите, что на любом шаге компьютер увеличивает число в ячейке либо на 1, либо на простое число.*

Выпишем в ряд несколько первых членов последовательности, указывая номер шага:

номер шага:		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 …
число в ячейке:	6	7	8	9	10	<u>15</u>	<u>18</u>	19	20	21	22	<u>33</u>	<u>36</u> …
на сколько было увеличение:		1	1	1	1	5	3	1	1	1	1	11	3 …

Можно заметить, что для начальных шагов выполняется следующее: если на данном шаге число в ячейке увеличилось не на 1, то это число в ячейке в три раза больше номера шага (на рисунке эти числа подчеркнуты).

Пусть на шаге n число в ячейке стало равно $3n$. На шаге $n+1$ число в ячейке увеличится на $\text{НОД}(n+1, 3n)$, и, так как n и $n+1$ взаимно просты, увеличение будет на $\text{НОД}(n+1, 3)$, т.е. на 1 или на 3. В последнем случае снова получим, что число в ячейке в три раза больше номера шага, после чего следующее увеличение будет уже на 1.

Сделанные замечания позволяют высказать гипотезу. *Пусть на шаге n в ячейку запишется число 3n, и на следующем шаге число в ячейке увеличится на 1. Рассмотрим ближайший шаг n + k, на котором увеличение числа в ячейке будет не на 1. Тогда это увеличение будет на простое число, причем число в ячейке снова окажется в три раза больше номера шага.*

Ясно, что, доказав гипотезу, мы решим задачу.

Докажем гипотезу по индукции. Базу мы уже проверили выше для маленьких номеров шагов. Докажем переход. Пусть на шаге n в ячейке будет записано $3n$, после чего шаг $n+k$ будет первым, при котором число в ячейке увеличится не на 1:

номер шага:	n	$n+1$	$n+2$ …	$n+k-1$	$n+k$
число в ячейке:	$3n$	$3n+1$	$3n+2$ …	$3n+k-1$	?

Увеличение числа на шаге $n+k$ будет равно[1]

$$\text{НОД}(n+k, 3n+k-1) = \text{НОД}\big(n+k, 3(n+k)-(3n+k-1)\big) = \text{НОД}(n+k, 2k+1),$$

т.е. является делителем числа $2k+1$.

Предположим, что число $2k+1$ не простое и имеет простой делитель p, входящий в $\text{НОД}(n+k, 2k+1)$. Так как $2k+1$ нечетно, этот делитель хотя бы в три раза меньше $2k+1$, а значит, меньше k. Посмотрим тогда на шаг $n+k-p$. На этом шаге число в ячейке увеличится на

$$\text{НОД}(n+k-p, 3n+k-p-1) = \text{НОД}\big(n+k-p, 3(n+k-p)-(3n+k-p-1)\big) = \text{НОД}(n+k-p, 2k+1-2p).$$

Но и $n+k-p$, и $2k+1-2p$ делятся на p, откуда получаем, что уже на шаге $n+k-p$ было увеличение не на 1. Противоречие с минимальностью шага $n+k$. Значит, $2k+1$ простое, и, следовательно, увеличение на шаге $n+k$ происходит ровно на $2k+1$, и число в ячейке становится равным $3n+k-1+2k+1 = 3(n+k)$ – в три раза больше номера шага. Гипотеза доказана по индукции, и тем самым задача решена.

С.Дориченко

Ф2145. *Суточный спутник Земли вращается по круговой орбите, лежащей в экваториальной плоскости. В результате кратковременного включения тормозного двигателя скорость спутника уменьшается по величине на 1 м/с, а направление скорости не меняется. Найдите изменение периода обращения спутника.*

Вначале обычным образом проведем расчет орбиты суточного спутника. Пусть радиус его орбиты $R = nR_0$, где R_0 – радиус Земли. Найдем n. Ускорение спутника на круговой орбите в n^2 раз меньше ускорения свободного падения на поверхности Земли:

$$\frac{v^2}{R} = \frac{g}{n^2}.$$

Выразим теперь период обращения T:

$$T = \frac{2\pi R}{v}.$$

Тогда

$$n \approx 6{,}63, \text{ и } v \approx 3070 \text{ м/с}.$$

Теперь о новой орбите. В апогее скорость спутника равна $v - \Delta v$ и расстояние от центра Земли равно R, в перигее обозначим скорость v_1, а расстояние R_1. По

---

[1] *Мы несколько раз пользуемся свойством наибольшего общего делителя:* $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, a-b)$.

второму закону Кеплера,

$$(v - \Delta v) R = v_1 R_1 .$$

Полные энергии в этих точках одинаковы, тогда

$$\frac{(v-\Delta v)^2}{2} - \frac{GM}{R} = \frac{v_1^2}{2} - \frac{GM}{R_1} .$$

Исключим из последних двух уравнений скорость в перигее v_1 и выразим расстояние R_1, точнее – величину $R + R_1$, т.е. большую ось новой орбиты.

Нам нужно знать отношение больших осей (или полуосей) новой и старой орбит, тогда можно будет при помощи третьего закона Кеплера найти отношение периодов обращения:

$$\frac{T_1^2}{T^2} = \frac{(R+R_1)^3}{(2R)^3} .$$

После соответствующих преобразований получим

$$\frac{R+R_1}{2R} \approx 1 - \frac{2\Delta v}{v}, \text{ и } T_1 \approx T\left(1 - \frac{3\Delta v}{v}\right) \approx 0{,}999T .$$

Итак, период обращения спутника уменьшится на 86,4 секунды.

А.Повторов

Ф2146. *По прямой бежит кролик, его скорость все время равна v_0 = 5 м/с. В точке, отстоящей на L_0 = 100 м от этой прямой, сидит лиса. Она замечает кролика и бросается в погоню, когда тот находится на минимальном расстоянии от упомянутой точки. Лиса бежит с такой же по величине скоростью, вектор скорости лисы направлен в любой момент в точку, где находится кролик. Найдите максимальное ускорение лисы в процессе погони. Лису и кролика считать материальными точками.*

Перейдем в систему отсчета, связанную с кроликом. В этой системе ускорение лисы такое же, как и в неподвижной системе отсчета. Проведем расчет для некоторой точки A (рис.1). Обозначим угол $AOБ$ буквой α, отрезок OA – буквой L. Сумма расстояний OA и $AБ$ остается неизменной: $OA + AБ = L_0$. Ускорение лисы определяется вращением вектора $\vec{v}_0$, направленного вдоль AO. Движение лисы происходит вдоль биссектрисы угла, образованного двумя векторами $\vec{v}_0$. Выберем малый интервал времени Δt и рассмотрим треугольник AOB (рис.2). Тогда, по теореме синусов,

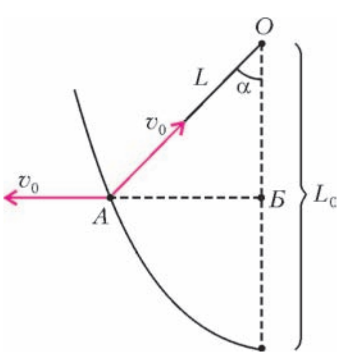


Рис. 1

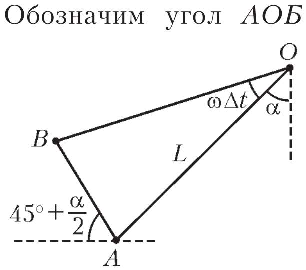


Рис. 2

$$\frac{AB}{\sin \omega\Delta t} = \frac{OB}{\sin(45° + \alpha/2)} ,$$

или

$$\frac{2v_0 \cos(45° + \alpha/2)\Delta t}{\omega\Delta t} = \frac{L}{\sin(45° + \alpha/2)} .$$

Отсюда находим угловую скорость:

$$\omega = \frac{v_0 \cos\alpha}{L} = \frac{v_0 \cos\alpha}{L_0/(1+\sin\alpha)}$$

и ускорение:

$$a = \omega v_0 = \frac{v_0^2 \cos\alpha \cdot (1+\sin\alpha)}{L_0} .$$

Исследуем полученное выражение для ускорения на максимум:

$$\left(\cos\alpha \cdot (1+\sin\alpha)\right)'_\alpha = 0 ,$$

$$2\sin^2\alpha_{max} + \sin\alpha_{max} - 1 = 0 ,$$

$$\sin\alpha_{max} = \frac{-1\pm 3}{4} ,\ \sin\alpha_{max} = 0{,}5 ,\ \alpha_{max} = 30° .$$

Окончательно,

$$a_{max} = \frac{v_0^2}{L_0}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{v_0^2}{L_0} \approx 0{,}3 \text{ м/с}^2 .$$

А.Старов

Ф2147. *У Пети и Васи в кухне на даче имеется небольшой автоматический подогреватель воды. Он представляет собой пятилитровую емкость с хорошей теплоизоляцией и электрическим двухкиловаттным нагревателем. Емкость всегда соединена с водопроводной трубой, по которой в нее может поступать холодная вода, а внизу есть краник, через который можно отбирать горячую воду. Нагреватель снабжен реле с регулятором, позволяющим установить желаемую температуру воды. Подогреватель используется в основном для мытья посуды, а поскольку ночью посуду никто не моет, его на ночь отключают.*

И тут у братьев зашел спор. Петя считал, что они поступают экономно, отключая электропитание прибора на ночь. Вася же полагал, что разницы никакой нет – ведь за ночь вода сильно остывает, и утром нагреватель включается на более длительное время, а если оставлять электропитание, то за ночь нагреватель будет включаться много раз, зато на небольшое время, поддерживая заданную температуру воды. Чтобы решить спор, братья проделали эксперимент. Они установили регулятор температуры на 46 °С. Оказалось, что за 9 ночных часов вода остыла до 30 °С. Температура воздуха ночью в кухне была 16 °С. Достаточно ли этих данных, чтобы оценить, сколько придется платить в месяц, если отключать или не отключать питание подогревателя воды на ночь? Стоимость киловатт-часа принять равной 3 рублям.

Пусть на ночь подогреватель не отключается от сети. Тогда после охлаждения воды от заданной температуры t_{max} на величину Δt (она определяется чувствительностью датчика и реле) включается нагреватель, который за время $\Delta\tau$ доводит температуру до t_{max}, после чего он отключается, и вода снова начинает остывать. Получается пилообразная зависимость температуры от времени. Причем из-за небольшой величины Δt «пила» состоит из прямых отрезков.

Скорость остывания воды w пропорциональна разности между температурой горячей воды $t_{\max}$ и температурой окружающего воздуха $t_{\text{возд}}$:

$$w = k\left(t_{\max} - t_{\text{возд}}\right) = \frac{\Delta t}{\Delta\tau},$$

где константа k определяется условиями теплоотвода. Отсюда находим время до следующего включения нагревателя:

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{w} = \frac{\Delta t}{k\left(t_{\max} - t_{\text{возд}}\right)}.$$

Число включений за ночь, т.е. за время τ, равно

$$n = \frac{\tau}{\Delta\tau} = \frac{k\tau\left(t_{\max} - t_{\text{возд}}\right)}{\Delta t}.$$

Расход энергии, полученной от нагревателя за время τ, равен $W_1 = mc\Delta tn$, где m – масса воды, c – ее удельная теплоемкость. Подставляя число включений n, получаем

$$W_1 = \frac{mc\Delta tk\tau\left(t_{\max} - t_{\text{возд}}\right)}{\Delta t} = mck\tau\left(t_{\max} - t_{\text{возд}}\right)$$

– расход энергии не зависит от длительности периодов охлаждения (при условии, что они невелики, так что температура снижается линейно).

Пусть теперь нагреватель на ночь выключается. Температура снижается экспоненциально от $t_{\max}$ до некоторой $t_{\min}$. Это описывается уравнением

$$t_{\min} - t_{\text{возд}} = \left(t_{\max} - t_{\text{возд}}\right)\cdot\exp(-k\tau). \qquad (*)$$

Утром включенный нагреватель греет частично остывшую воду от $t_{\min}$ до $t_{\max}$, при этом затрачивается энергия

$$W_2 = mc\left(t_{\max} - t_{\min}\right).$$

Используем теперь результаты эксперимента. Имеем: $\tau = 9$ ч, $t_{\max} = 46$ °C, $t_{\text{возд}} = 16$ °C, $t_{\min} = 30$ °C. Подставляем эти данные в уравнение $(*)$ и получаем

$$30 - 16 = (46 - 16)\cdot\exp(-9k),$$

откуда находим

$$\exp(-9k) = 14 : 30 = 0{,}47, \quad -9k = \ln 0{,}47 = -0{,}76,$$

$$\text{и } k = 0{,}084 \text{ ч}^{-1}.$$

Тогда расход энергии без выключения нагревателя равен

$$W_1 = mck\tau\left(t_{\max} - t_{\text{возд}}\right) = 22{,}7mc.$$

Расход энергии с выключением нагревателя составляет

$$W_2 = mc\left(t_{\max} - t_{\min}\right) = 16mc.$$

Вывод: при выключении нагревателя на ночь расход энергии уменьшается в 22,7 : 16 = 1,4 раза.

Пусть $m = 5$ кг, $c = 4{,}2$ кДж/(кг · К). Тогда утром по второму способу расход энергии на нагрев воды будет 5 кг · 4,2 кДж/(кг · К) · 16 К ≈ 340 кДж ≈ 0,1 кВт · ч. За месяц такой «ночной» расход составит 3 кВт · ч, за что придется заплатить 9 рублей. А по первому способу – в 1,4 раза больше, т.е. 12,6 рублей.

Как видим, разница небольшая, почти в пределах ошибки измерений. Во всяком случае, сэкономленных за лето денег (в случае выключения нагревателя на ночь) не хватит даже на мороженое.

И.Леенсон

Ф2148. *Давление насыщенных паров воды при +20 °C составляет 1000 Па, а при температуре +20,5 °C оно возрастает до 1020 Па. Определите по этим данным молярную теплоту испарения воды при +20 °C.*

Для того чтобы найти связь между давлениями насыщенного пара при разных температурах и молярной теплотой парообразования r, нужно рассмотреть процесс, в котором происходит испарение воды. Удобно произвести расчет для тепловой машины с водяным паром в качестве рабочего тела. Единственный пример тепловой машины, для которой известна формула КПД, это машина, работающая по циклу Карно.

Пусть температура нагревателя такой машины $T_{\text{н}} = (273 + 20{,}5)$ К $= 293{,}5$ К, а температура холодильника $T_{\text{х}} = 293$ К. Тогда термодинамический КПД машины равен

$$\eta = \frac{T_{\text{н}} - T_{\text{х}}}{T_{\text{н}}} = \frac{\Delta T}{T_{\text{н}}} = \frac{0{,}5}{293{,}5} = \frac{1}{587}.$$

Передадим рабочему телу от нагревателя количество теплоты, необходимое для испарения одного моля (т.е. 18 г) воды:

$$Q_{\text{н}} = r.$$

При этой температуре моль водяного пара занимает объем

$$V_{\text{м}} = \frac{RT}{p}.$$

Если пренебречь объемом, который занимал 1 моль в жидком состоянии, то работа по расширению равна

$$A_1 = p_1V_{\text{м}},$$

а работа в цикле составляет

$$A = \left(p_1 - p_2\right)V_{\text{м}} = \frac{\Delta pRT}{p}.$$

Тогда получим

$$\frac{A}{Q_{\text{н}}} = \eta, \text{ или } \frac{\Delta pRT}{pr} = \frac{\Delta T}{T}.$$

Отсюда находим

$$r = \frac{\Delta pRT^2}{p\Delta T} = \frac{20\cdot 8{,}3\cdot 293{,}5^2}{1000\cdot 0{,}5} \text{ Дж/моль} \approx 29 \text{ кДж/моль}.$$

Нужно сказать, что найденное значение молярной теплоты испарения существенно ниже табличного (около 41 кДж/моль). Дело в том, что давления насыщенного пара в условии задачи были взяты «с потолка». Правильные величины $p_1 = 2{,}9$ кПа и $\Delta p = 75$ Па дают неплохое совпадение с табличным значением молярной теплоты испарения воды.

З.Рафаилов

Ф2149. *Конденсаторы емкостями C = 100 мкФ и 2C и резистор сопротивлением R_1 = 10 Ом соединены* *последовательно, а параллельно конденсатору емкостью C подключен резистор сопротивлением R_2 = = 100 кОм. К выводам цепочки подключают батарейку напряжением U = 10 В. Какое количество теплоты выделится в резисторе сопротивлением R_1? А в резисторе сопротивлением R_2?*

При подключении батарейки конденсаторы начинают заряжаться большим током – его величина определяется последовательно включенным резистором сопротивлением R_1. Этот ток быстро убывает, так что через очень маленький интервал времени конденсаторы оказываются заряженными. В течение этого интервала ток через резистор сопротивлением R_1 пренебрежимо мал, и тепловыми потерями в нем можно пренебречь. В начальный момент разность потенциалов между выводами первого резистора равна напряжению батарейки, затем она быстро спадет практически до нуля, в результате чего через этот резистор протечет заряд $q_1 = UC_{\text{общ}} = 2CU/3$. Тогда количество теплоты, выделившееся в резисторе сопротивлением R_1, составит

$$Q_1 = \frac{q_1 U}{2} = \frac{CU^2}{3} = 3{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

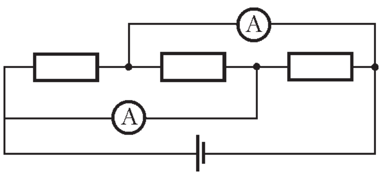
После того как ток в цепи батарейки станет малым, наступает второй интересный нам интервал времени – конденсатор емкостью $2C$ понемногу разряжается, а конденсатор емкостью C медленно заряжается до напряжения U. При этом разность потенциалов между выводами резистора сопротивлением R_2 уменьшится от $2U/3$ до нуля, и через резистор протечет полный заряд $q_2 = U \cdot 2C$ (полный заряд соединенных друг с другом двух обкладок конденсаторов вначале нулевой, а через большое время он равен по величине $2C \cdot U$). Количество теплоты, выделившееся в резисторе сопротивлением R_2, составит

$$Q_2 = \frac{q_2 \cdot 2U/3}{2} = \frac{2CU^2}{3} = 6{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

При решении мы учли, что $R_1 \ll R_2$. И еще. Для того чтобы среднее значение разности потенциалов при вычислении выделившегося количества теплоты можно было брать равным полусумме начального и конечного значений, нужно быть уверенным, что эта разность потенциалов от величины протекшего заряда зависит линейно. Это для данного случая легко доказать. Но можно делать расчет и иначе, пользуясь балансом энергий – только нужно аккуратно учитывать работу батарейки.

А.Зильберман

Ф2150. *В схеме на рисунке резисторы (слева направо) имеют сопротивления 500 Ом, 200 Ом и 200 Ом, напряжение батарейки 6 В. Амперметры одинаковые: каждый имеет сопротивление 1 Ом, «класс точности» 1%, ток полного отклонения 50 мА. Найдите показания амперметров.*



Если считать сопротивления амперметров нулевыми, то три резистора в цепи окажутся соединенными параллельно и подключенными к батарейке. При этом ток через «верхний» прибор составит 42 мА, а через «нижний» 60 мА. Аккуратный расчет дает значения 41,4 мА и 59,2 мА (заменив амперметры резисторами сопротивлением по 1 Ом, получим обычную схему «мостика»).

Итак, один амперметр покажет примерно 41,5 мА, а второй немного «зашкалит». При упомянутой точности приборов разница точного и приближенного расчетов оказывается существенной (по крайней мере – для одного из приборов).

А.Простов

Ф2151. *Три катушки, индуктивности которых 1 Гн, 2 Гн и 4 Гн, соединены «звездой». Общая точка заземлена куском провода, параллельно этому проводу включен конденсатор емкостью 10 мкФ. В некоторый момент свободные концы катушек подключают к батарейкам, создающим в точках подключения одинаковые потенциалы +6 В. Через время 0,1 с после подключения заземляющий провод перерезают. Найдите максимальный заряд конденсатора. Элементы цепи считать идеальными.*

На первом этапе ЭДС индукции каждой катушки составляет ровно 6 вольт (кстати, тут достаточно одной батарейки, катушки будут подключены параллельно к выводам этой батарейки). При этих условиях токи катушек линейно возрастают со временем, и через время τ ток катушки индуктивностью L составит

$$I = \frac{U_0 \tau}{L}.$$

Для первой, второй и третьей катушки этот ток будет, соответственно, 0,6 А, 0,3 А и 0,15 А.

После перерезания заземляющего проводника токи катушек начинают уменьшаться, но при наших условиях (равенство ЭДС индукций параллельно соединенных катушек) они одновременно упадут до нуля – а это есть условие максимальности заряда конденсатора.

Обозначим этот заряд Q, тогда работа батарейки при «проталкивании» по цепи заряда Q равна $U_0 Q$, а энергия конденсатора равна сумме энергий катушек перед разрезанием проводника и работы батарейки. Получим уравнение

$$\frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + \frac{L_3 I_3^2}{2} + U_0 Q = \frac{Q^2}{2C}.$$

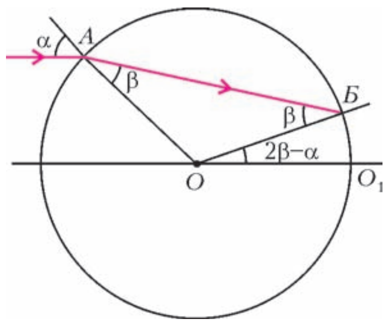
Решая это квадратное уравнение относительно Q, для максимального заряда конденсатора получаем

$$Q \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{Кл}.$$

Р.Александров

Ф2152. *Широкий параллельный пучок лучей падает на прозрачный однородный шар из материала с коэффициентом преломления n = 1,414. Найдите размер светлого пятна на противоположной стороне шара.*

Лучи, идущие близко к «главному» диаметру шара OO_1 (малые углы падения), выходят с другой стороны тоже близко к нему; значит, не они определяют максимальный диаметр пятна. При заданном значении коэф-



фициента преломления близкие к краю шара лучи попадают почти точно в точку на том же диаметре (угол падения $90°$, угол преломления $45°$). Ясно, что максимальное значение диаметра пятна получается от лучей, падающих где-то посредине; обозначим соответствующий угол падения луча α_0.

Пусть A – точка входа луча в шар, $Б$ – точка выхода луча из шара (см. рисунок). Тогда угол $БOO_1$ равен $2\beta-\alpha$, где $\sin\beta=(\sin\alpha)/n$, и максимальный радиус пятна определяется максимальным значением выражения $R\sin(2\beta-\alpha)$, где R – радиус шара. Таким образом, нужно исследовать на максимум выражение $R\sin\left(2\arcsin\dfrac{\sin\alpha}{n}-\alpha\right)$. Можно приравнять к нулю производную этого выражения по α, а можно упростить процедуру за счет монотонности синуса в интересующем нас диапазоне углов и брать производную от аргумента $2\arcsin\dfrac{\sin\alpha}{n}-\alpha$. Уравнение получается довольно простым, вот его решение:

$$\alpha_0=54{,}7°.$$

При этом радиус светлого пятна на противоположной стороне шара равен

$$r=0{,}272R.$$

Ответ можно получить довольно быстро подбором при помощи калькулятора (даже непрограммируемого – лишь бы он умел вычислять тригонометрические функции). У автора такой подбор занял чуть меньше трех минут.

А.Шаров

ИНФОРМАЦИЯ

Декларация оргкомитета конкурса «Свободный полет»

Объявляя настоящий конкурс, основной целью которого является выявление и поощрение самостоятельно и результативно мыслящих молодых исследователей, считаем необходимым представить его участникам наш подход к пониманию роли, которую должны играть такие люди в современном научно-технологическом мире.

Сегодня, как правило, серьезные научно-технические разработки ведутся большими коллективами людей. Обнаружение новых фактов требует огромных затрат, которые должны быть обоснованы не только расчетами, но и мнением научного сообщества. В конкуренции идей главным фактором становится «вес» (звания и число) людей, стоящих за той или иной идеей. Наука формально (фактически это было всегда) становится частью экономики и политики, впитывая в себя и то, что характерно для последних: инерцию, бюрократию, рекламу и т.п. Что в этих обстоятельствах по силам одиночкам? Как быть людям, которые ничего не принимают на веру, сомневаются в истинности привычных для всех концепций, полны «безумными идеями» и желают их реализовать? Перед ними, как правило, встает «стена» из консерватизма, бюрократии и недобросовестной конкуренции. Особенно в случаях, когда реализация их продвинутых идей может оставить без дела целые научные школы. Между тем, именно такие люди и могут дать импульс научно-техническому прогрессу. Ведь прогресс представляет собой не эволюционный процесс, а череду пусть и небольших, но революций, инициируемых людьми, готовыми без промедления отказаться от привычных взглядов и понятий. Таких людей достаточно много (по некоторым оценкам, десятки тысяч). Некоторым из них может в жизни повезти – в силу сложившихся обстоятельств они попадают в «команды», которые дают им возможность реализоваться. Большинство, не будучи услышанными, «перегорают», многие «изобретают велосипеды». А рост информационного пространства, увеличивающееся дробление науки на отрасли и направления и т.п. далеко не всегда способствуют реализации потенциала этих людей. К тому же, самостоятельное мышление – это не услада для его обладателя, который зачастую полон неуверенности и сомнений, мечется между противоположностями и отягощен необходимостью каждый раз делать самостоятельный выбор.

В качестве примера остановимся на дилемме «конечное – бесконечное». Очевидно, здесь речь идет о противоположностях, причем первое понятие сходу кажется понятным, а второе – скорее чем-то неуловимым, абстрактным. Но если вдуматься, то «конечное» – это столь же ускользающее понятие, что и «бесконечное». Каждое взятое в одиночку, они имеют мало смысла. Лишь в сочетании эти понятия обогащают содержание друг друга. Согласитесь, что не бывает бесконечного, которое не содержало бы в себе конечных составляющих, и точно так же нет смысла выделять конечное само по себе, если оно не подразумевает бесконечное. Сходная логика обнаруживается и при выделении других парных сочетаний противоположных понятий: «дискретное – непрерывное» («частица – поле»), «материя – пространство», «движение – покой» и т.п. Как говорят философы, понятие (утверждение) содержательно (богато возможностями в плане использования) настолько, насколько содержательно ему противоположное.

Вот почему объективная мысль мечется в противоположностях. Конечно, это тяжело – думать про одно и все время помнить про другое. Хочется определиться и перейти к, казалось бы, нормальному однонаправленному мышлению. И в большинстве конкретных ситуаций, чтобы мышление было результативным, так и нужно делать. Необходимо тогда обуздать воображение, отбросить сомнения и, остановившись на определенных взаимно непротиворечивых положениях, подвергнуть свои идеи

Информация об этом конкурсе, проводимом благотворительным фондом «Новая мысль», опубликована в журнале «Квант» № 5.

логическому анализу, результаты размышлений сверить с фактами или с аналогами из других концепций.

Самостоятельное мышление – это не только понимание сути и основ теории и сферы ее применимости, умение выводить в ее рамках следствия для частных случаев и т.п. Необходимо еще понимать, что всякая теория имеет альтернативы, допускать эти альтернативы, быть готовым в любой момент отказаться от привычных концепций, если новые факты укладываются в их рамки «со скрипом» (тем более, когда выходят за эти рамки).

Разумеется, существуют понятия, в основательности которых трудно усомниться. Например, окружающая нас реальность со всеми происходящими в ней процессами сплошь и рядом демонстрирует незыблемость и всеобщность следующих трех свойств: экономичность, симметричность и относительность (два последних в какой-то мере являются частными случаями первого). Возможно, этот список не является исчерпывающим и нуждается в дополнении (в будущем, скорее всего, так и случится). Но как бы то ни было, можно перечислить ряд положений, которые нельзя включать в этот список всеобщих понятий несмотря на то, что они считаются фундаментальными.

Например, нельзя принять на веру, что электрон на земле и электрон на расстояниях в миллиарды световых лет от нее имеют в точности одну и ту же массу покоя. Трудно считать незыблемыми физическими константами такие безразмерные величины, как, например, постоянная тонкой атомной структуры, отношения масс элементарных частиц и т.п. Еще Эйнштейн сомневался в их, так сказать, случайном характере. Или это суть математические константы (т.е. выводятся в рамках какой-то неизвестной нам теории), или они не являются константами (т.е. меняются во времени и (или) в пространстве). Трехмерность окружающего нас пространства также является одним из постулатов современной теории, но пока нет оснований считать его незыблемым. Завершим эти примеры таким утверждением: *возможность чего-либо невозможно опровергнуть!* Иными словами, нельзя на практике доказать, что нечто невозможно. Это один из атрибутов бесконечности, демонстрирующий ограниченность логики.

Объявляя наш конкурс, мы преднамеренно не конкретизируем задания для его участников. Содержательность ответа, как известно, зависит от качества вопроса. Как говорят, хороший вопрос – это половина ответа. Поэтому оцениваться будет и постановка проблемы тоже. Более того, решение может быть не самым удачным или даже неправильным, но это компенсируется качеством и актуальностью постановки вопроса. Помните, что вопросы-сигналы, поступающие из окружающего мира (факты, явления и т.п.), – это первооснова, сырье, которое еще предстоит в процессе изучения переработать, превратить в задачу. А затем уже надо анализировать четко поставленную задачу, определять круг описываемых явлений, область изменения и точность задания параметров, для которых решение будет корректно, и т.д.

Мы специально не ограничиваем участников конкурса в выборе и формулировании вопросов. Пусть это будет что угодно, лишь бы оно имело определенный смысл. В современной науке и развивающихся технологиях есть множество проблем. В частности, это известные расходимости в квантовой теории, корректное определение тензора энергии-импульса в общей теории относительности, парадоксы в теории множеств, саморазвивающиеся компьютерные программы (включение в них случайных выборов, учет опыта ошибок и т.п.). Да и в обыденной жизни найдется многое, что можно попытаться формализовать на языке математики (например, обнаружив определенное подобие, попробовать применить законы газовой динамики для ... анализа движения машин на автостраде).

Можно поставить задачу из серии «что было бы, если бы ...» Или придумать новый вид взаимодействия. Или выяснить, какова была бы реальность, если бы, например, постоянная Планка оказалась заметно больше (или меньше) той, которая нам известна. Не так уж гипотетична задача, в которой какие-либо мировые константы можно было бы считать нестационарными. Например, красное смещение можно объяснить не только разбеганием галактик, но и тем, что со временем меняются масса электрона или постоянная Планка.

Итак, мы не ждем от вас открытий. Нас особенно не интересует и ваша эрудиция, поэтому не бойтесь прослыть невежественными. Скорее всего, то, что мы от вас ждем (а вы нам пришлете), не принял бы ни один серьезный научный журнал. Наверное, серьезные ученые скорее всего отправляют подобное «творчество» в корзину, так же как следователь отбрасывает не оправдавшие себя версии. Но кто знает, может когда-нибудь среди такой «отработки» найдется то, что раньше упустили. Например, кто-то, роясь в этой общей корзине, наткнется на необычные идеи, которые послужат толчком для новых открытий. Но даже если все будет не так, мы надеемся достичь своей главной цели: помочь реализовать себя людям, способным к самостоятельному нестандартному мышлению и поиску. Так рождаются инновации.

Сомневайтесь! Опровергайте! Предлагайте!

Условия проведения конкурса

Каждый участник представляет на рассмотрение жюри свой проект, содержащий сформулированную задачу и ее решение. (В отдельных случаях жюри готово рассматривать задачи с незавершенными решениями.)

Общий объем отчета по проекту должен быть не более 10 машинописных страниц, при этом все громоздкие вычисления должны быть вынесены в приложения, которые являются составной частью отчета.

Распечатанный вариант отчета (1 экз.) нужно прислать по почте в редакцию журнала «Квант» по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, д. 64-А, а электронный отчет отдельным файлом нужно послать на электронный адрес редакции: admin@kvant.info.

Титульный лист отчета должен содержать следующую информацию о конкурсанте:

фамилия, имя, отчество;

почтовый адрес, электронный адрес, телефон;

данные об образовании, о наличии научной степени (если таковая имеется).

Срок приема заявок на участие в конкурсе – *до 15 апреля 2010 года.* Итоги конкурса будут подведены в конце мая 2010 года.

Работы, с согласия их авторов и заслуживающие общего внимания по мнению жюри, будут размещаться на специальном сайте фонда «Новая мысль» с указанием тех работ, которые отмечены премиями.

Журнал «Квант», независимо от результатов участия работы в конкурсе, может (по согласованию с автором) опубликовать некоторые работы, подходящие по формату и идеологии журнала.

Задачи

1. Мистер Твистер получил в наследство несколько фабрик. За его жизнь 7 фабрик разорилось, а остальные он разделил поровну между своими семью сыновьями. Младший сын за свою жизнь пустил на ветер 6 фабрик, а остальные разделил между своими семью сыновьями. Его младший сын продал с молотка 5 фабрик, но остальные по семейной традиции разделил между своими семью сыновьями. При жизни его младшего сына разорились 4 фабрики, но когда дело дошло до наследства, делить было нечего – у прогоревшего дельца оставалась всего одна фабрика. Сколько фабрик было изначально у мистера Твистера?

А.Хачатурян

2. Планета имеет форму шара. Можно ли провести на ней 2009 меридианов и 2010 параллелей так, чтобы они разделили планету на участки равной площади?

Г.Гальперин

3. Два насоса вместе заполняют бассейн за два часа, а раздельно они заполняют его за целое, но разное число часов. За сколько часов каждый насос заполняет бассейн?

Н.Конищев

4. Петя вышел из точки *А* плоской равнины и прошел 1 м на юг, 2 м – на запад, 3 м – на север, 4 м – на восток, 5 м – на юг, 6 м – на запад, 7 м – на север, 8 м – на восток и т.д. Пройдя суммарно 5 км, Петя устал и сел отдохнуть. На каком расстоянии от точки *А* это случилось?

С.Дориченко, Т.Голенищева-Кутузова

5. Имеется 9 одинаковых с виду монет. Из них одна фальшивая, которая легче настоящей. Одна из монет прилипла к одной из чаш чашечных весов без гирь. Отдирать ее некогда. Как за два взвешивания найти фальшивую монету? (Она может быть и прилипшей.)

А.Шаповалов

Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу:* math@kvant.info *(с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

11. Расставьте между числами в левой части равенства

$$7^5\ \ 7^4\ \ 7^3\ \ 7^2\ \ 7\ \ \ 1 = 2009$$

знаки арифметических действий и скобки так, чтобы равенство стало верным.

М.Мурашкин

12. Назовем натуральное число *возрастающим*, если в нем каждая следующая цифра больше предыдущей (например, число 23689). Докажите, что если возрастающее число умножить на 9, то сумма цифр полученного числа всегда равна в точности девяти.

Фольклор (предложил Л.Штейнгарц)

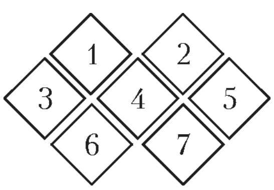


Рис. 1

13. Из пронумерованных квадратных фишек 1×1 сложена фигура, содержащая два квадрата 2×2, причем фишка с номером 4 – общая (рис.1). Фишки каждого квадрата 2×2 можно поворачивать вокруг его центра на угол, кратный 90°. Можно ли при помощи таких поворотов получить расположения, показанные на рисунках 2 и 3?

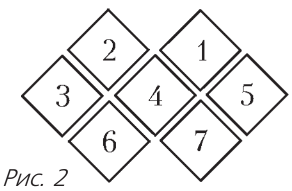


Рис. 2

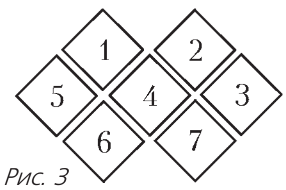


Рис. 3

Н.Авилов

14. Докажите неравенство $a + b + c \geq \sqrt{3}$, если известно, что $ab + bc + ca = 1$ и среди чисел a, b, c хотя бы два положительны.

В.Асланян

15. Докажите, что любой выпуклый четырехугольник можно разрезать на четыре части, из которых складывается прямоугольник.

С.Волчёнков

Мешает ли птицам попутный ветер

Н.КОНСТАНТИНОВ

КОГДА Я УЖЕ НАУЧИЛСЯ ЧИТАТЬ, МНЕ ПОПАЛАСЬ КНИЖка о путешественниках – какая именно книжка, я забыл, а запомнил из нее только один эпизод.

Путешественники разбили лагерь в лесу рядом с озером, на которое села для отдыха во время перелета стая диких гусей. Наступил вечер, и охотиться было уже невозможно.

– Завтра будет славная охота, – сказал один.

– А ты не думаешь, что на рассвете птицы улетят? – сказал другой.

– Не улетят, ведь ветер северный, для гусей попутный. Птицы не летают с попутным ветром, так как он задувает им под маховые перья крыльев.

Этот разговор показался мне странным. Я бы на месте птиц радовался попутному ветру – на нем можно лететь быстро, быстрее ветра. Но я был маленький, и все, что написано в книгах, было для меня истиной. Так что я запомнил только, что я чего-то не понял.

Прошло двадцать пять лет. Я учился в аспирантуре, моим руководителем был Алексей Андреевич Ляпунов – известный математик, который в это время глубоко интересовался кибернетикой и математическими подходами к биологии. Он был связан научными интересами и личной дружбой с нашим крупным биофизиком, одним из основателей науки биофизики – Николаем Владимировичем Тимофеевым-Ресовским. По

совету Алексея Андреевича я посетил семинар по биофизике, проводившийся Николаем Владимировичем на биостанции Миассово на Урале. История, рассказанная Николаем Владимировичем, заставила меня вспомнить прочитанную в детстве книжку. Оказывается, было время (и я как раз его застал), когда из статьи в статью, из книги в книгу повторялась одна и та же мысль – что попутный ветер задувает птицам под крылья. И группа биологов, в их числе Тимофеев-Ресовский, в нескольких публикациях разъяснили биологам ошибочность этой мысли и рассказали о принципе относительности Галилея.

Еще один эпизод напомнил мне, что некоторые старшеклассники в наше время еще не доросли до понимания картины мира, возникшей после открытий Галилея.

Стройотряд из студентов и школьников работал летом на Беломорской биостанции МГУ (я был уже учителем). Мы возвращались с одной морской экскурсии на теплоходе «Научный». Группа ребят попросила у капитана разрешения сидеть не на теплоходе, а в шлюпке, которая тянулась за теплоходом на буксире (там было куда приятнее). А за шлюпкой, на расстоянии примерно трех метров от нее, тянулся еще маленький ялик, в котором никто не сидел.

И вот самый молодой из нас, Леша Кувшинов, который тогда перешел в десятый класс, захотел пересесть в ялик. А сделать это на ходу было, по-моему, невозможно. По крайней мере, очень трудно: даже если подтянуть ялик к шлюпке, то пересесть на него и не перевернуться было немыслимо. Но Леша придумал другой способ: «Я высоко подпрыгну, а пока буду опускаться, ялик окажется уже подо мной». И тут все старшеклассники (а это были все матшкольники, и с ними шутки плохи) стали наперебой объяснять Леше принцип относительности Галилея.

Землю, говорили они, можно считать инерциальной системой отсчета. Это означает, что если на тело не действуют внешние силы (или, точнее, если все силы, действующие на тело, компенсируют друг друга), то оно сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения относительно Земли. Конечно, бывают такие ситуации, в которых систему отсчета, связанную с Землей, нельзя считать инерциальной. Наглядный пример тому – маятник Фуко. В инерциальной системе отсчета плоскость, в которой колеблется маятник, остается постоянной, а в действительности, скажем если опыт поставлен в Москве, плоскость колебаний медленно поворачивается. Другой пример – реки, текущие в северном полушарии, подмывают правый берег. А если бы система, связанная с Землей, была инерциальной, оба берега были бы равноправны. Но это все довольно тонкие эффекты, наблюдаемые либо при очень точных измерениях, либо за очень большие промежутки времени. В нашем же случае систему отсчета, связанную с Землей, вполне можно считать инерциальной. Значит, и любую другую систему отсчета, которая движется относительно Земли равномерно и прямолинейно, также можно считать инерциальной. Наша шлюпка как раз и есть такая система отсчета. И тогда, по принципу относительности Галилея, все законы физики в системе шлюпки выглядят так же, как и в системе, связанной с Землей. И подпрыгнув в шлюпке ты опустишся в ту же точку шлюпки, из которой стартовал, как это было бы и на берегу.

Тут один из наших ребят возразил, что если на твердой почве, т.е. на берегу, выстрелить вертикально вверх, то снаряд не упадет в ту же точку, из которой стартовал, даже если воздух полностью неподвижен относительно Земли. Это действительно так, но это еще один случай, демонстрирующий неинерциальность земной системы отсчета. Поскольку эффект незначительный, в нашем опыте его можно не учитывать.

Однако Лешу все эти объяснения не убедили. Приводили ему и рассуждения Галилея, объяснявшего своим современникам, что если дуэль на пистолетах происходит в трюме движущегося корабля, то ни один из дуэлянтов, смотрит ли он от кормы к носу корабля или наоборот, не имеет преимуществ. И напоминали, как он, Леша, едучи в поезде на Биостанцию, играл в вагоне в мяч и мяч двигался по отношению к вагону так же, как он двигался бы на неподвижной земле при тех же ударах по нему. Но все было бесполезно. Леша непременно хотел подпрыгнуть, а мы возражали, так как шлюпка в результате удара могла дать течь. Но в конце концов уступили, и Леша подпрыгнул. Он, как и должно было быть, опустился в исходную точку (а лодка так качнулась, что набрала некоторое количество воды). Леша надолго задумался. И, наверное, запомнил принцип относительности Галилея навсегда.

Воспользуюсь случаем, чтобы показать на примерах, как поверхностно зачастую школьники учат уроки.

Однажды один студент ехал на Беломорскую биостанцию. Он приехал на поезде в Пояконду, откуда его должны были доставить к месту на катере. Подошел к берегу в три часа ночи (ночи белые), до прихода катера было еще далеко. Кругом ни души. Он положил на землю свой тяжелый рюкзак и пошел осматривать окрестности. А когда вернулся, рюкзака не было. О воровстве не могло быть и речи – поселок крохотный, и жители даже дверей не запирают. Студент сел на камень и предался тяжелым размышлениям о превратностях жизни. «А что это там в море плавает?» – подумал студент. «Нет, не плавает, а, пожалуй, стоит на месте». Пригляделся. «Да это же мой рюкзак!» – догадался студент. Благо были на нем сапоги – дошел до рюкзака по мелководью. Забыл студент, что в море бывают приливы. А ведь учил это в школе, и, возможно, даже получил пятерку за отлично вызубренный урок. Но в том-то и дело, что можно вызубрить и не задуматься.

Другой случай – опять же на Белом море. Группа туристов пошла погулять, а один из них, Саша Кодряну, остался у костра, чтобы приготовить чай. Это был очень толковый школьник, только что заработавший первую премию на Всесоюзной математической олимпиаде. Он пошел к колодцу, а рядом море – вода в нем такая прозрачная и так красиво играет на солнце. И он набрал в ведро морской воды. Забыл он, что вода в море соленая, а ведь наверняка знал об этом. Но это были знания для отметки, а не для жизни. Вода (соленая) закипела как раз к возвращению уставшей группы.

Получается, что школьные знания могут оказаться бесполезными. Это бывает, если они не связываются с жизненными наблюдениями. У человека должны быть две «школы» – одна на улице и дома, другая – в школе, и они должны быть связаны. Но так бывает не всегда. Вот идет человек по городу, ему пятнадцать лет, и у него стопроцентное зрение. Но он ничего не видит. Он не заметил, что голуби и вороны – это разные птицы. Не заметил, что у троллейбусов на крыше рога (они по-научному называются пантографы). Он никогда не видел радуги, не замечал, что у кучевых облаков нижние поверхности обычно ровные. Все это я не выдумал – это результаты наблюдений. Спросил я както своих кружковцев, бывает ли так, что Луна и Солнце видны на небе одновременно. Один сказал, что он однажды это видел, остальные ничего такого не замечали, а некоторые вообще удивились, что Луну можно увидеть днем.

Но... вернемся к птицам. Меня всегда учили, что записные книжки Леонардо да Винчи изобилуют гениальными догадками. И вот недавно я, наконец, решил почитать эти книжки, которые, разумеется, давно изданы в солидных академических издательствах. В «Избранных произведениях» Леонардо да Винчи (М.: Издательство АН СССР, 1955) есть глава «О летании и движении тел в воздухе». Это подробное исследование, в котором много интересных наблюдений и прекрасных рисунков. Но понимать его очень трудно, порой невозможно. Ведь Леонардо писал для себя, не заботясь о том, чтобы разъяснять смысл употребляемых терминов. В этой главе есть раздел «Почему перелетные птицы летают против течения ветра?» Я в этом тексте не смог разобраться, но вывод очевидно не верен. На рисунках показано, как птицы взлетают – действительно всегда против ветра. А когда они уже высоко, то не видно, куда дует ветер. Можно предположить, что это и привело к ошибке.

Надо заметить, что Леонардо постоянно ссылается на законы статики, открытые еще Архимедом (Архимеда он изучал по полному собранию сочинений, которое, как известно из его записных книжек, было ему доступно). Но для изучения полета недостаточно статики. А динамики, как науки, тогда еще не было, и Леонардо там, где не хватало знаний, постоянно использовал интуитивные догадки. Так, всю жизнь он пытался создать летательный аппарат, но это ему не удалось. Потребовались четыре столетия развития науки и техники, чтобы человек поднялся, наконец, в воздух.

Итак, мне кажется, я догадался, откуда у биологов возникла ошибочная мысль о том, что попутный ветер мешает птицам летать. Она возникла из трудов Леонардо да Винчи. А удерживалась эта идея в головах некоторых людей потому, что в знании физики эти люди не перевалили через эпоху Галилея. Но не будем упрекать Леонардо в том, что он не опередил следовавшего за ним гения...

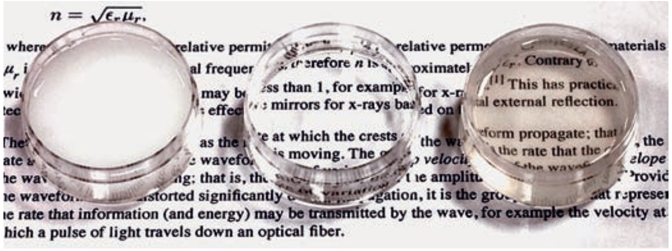
ПРОГУЛКИ С ФИЗИКОЙ

Как сделать молоко прозрачным?

(Начало см. на 4-й странице обложки)

… Оказывается, что через некоторое время, когда концентрация сахара в растворе молока в воде достигнет необходимой величины, раствор опять станет прозрачным. Просветляющее действие сахара объясняется довольно просто.

Тела перестают быть прозрачными, когда внутри них появляются границы раздела сред с различными показателями преломления света. В молоке это границы между капельками молочного жира (его показатель преломления $n = 1{,}433 - 1{,}500$) и водой ($n = 1{,}333$). На этих границах свет отражается в самых разных направлениях, т.е. рассеивает-



ся. Вот почему молоко непрозрачное. Если же увеличить показатель преломления воды, доведя его до показателя преломления молочного жира, например растворив в ней сахар, то молоко можно сделать прозрачным.

К.Богданов

Столкновение самолета с ... птицей

В.ВЫШИНСКИЙ

Очень многие школьные задачи по физике начинаются словами типа «шарик массой m ударяется о твердую поверхность...» В нашем же случае роль шарика будет играть отнюдь не абсолютно упругая птица, а роль поверхности – увы, не совсем твердый корпус авиалайнера.

Тяжелый самолет совершал полет на режиме снижения с одним неработающим двигателем. По-видимому, в результате столкновения с птицей произошло разрушение радиопрозрачного обтекателя антенны. Разлетевшиеся осколки, по-видимому, попали в воздухозаборники двигателей, что, по-видимому, одновременно включило автоматику на перезапуск двигателей. Оказавшись без тяги, самолет не смог сохранить безопасную высоту и врезался в землю.

В летных происшествиях, и особенно в катастрофах, многое так и остается не выясненным до конца. По статистике, столкновение с птицей как причина летного происшествия стоит на третьем месте после отказов материальной части (самолета и двигателей) и человеческого фактора (ошибок экипажа).

Существуют специальные экспериментальные установки (пневматические пушки) для проверки самолета на прочность в случае столкновения с птицей. Их заряжают тушками птицы (скорость вылета тушки 100–300 м/с). Стандартным «снарядом» по международным нормам является птица массой 1,8 кг (обычно используют свежезабитых кур, хотя, как будет видно из дальнейшего, они весьма посредственно моделируют столкновение с хорошими летунами). Конструкция самолета должна выдерживать удар птицы, летящей со скоростью, равной скорости полета самолета на тех высотах, на которых встречаются птицы.

Известен курьезный случай, когда молодой экспериментатор, видимо из соображений экономии, зарядил установку мороженной курицей и ...пробил остекление кабины пилота, прошедшее предварительные испытания. Когда разобрались, поняли, что дело не в остеклении, а в тушке птицы. Птица должна быть если не живой, то хотя бы не мороженной. Экспериментатору объявили выговор, остекление заменили, а мы попытаемся разобраться, в чем же дело.

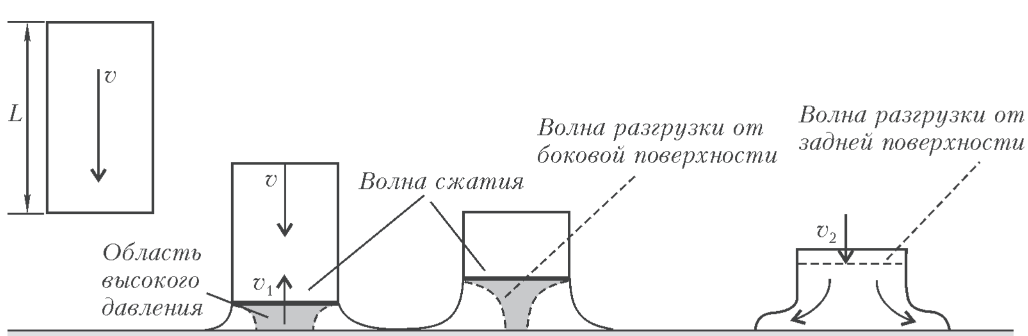


Рис.1. Столкновение цилиндрического тела с преградой (L – длина цилиндра)

В качестве модели будем рассматривать удар жидкой капли о жесткую преграду. С момента касания преграды в капле со скоростью v_1 распространяется волна сжатия (ударная волна). При достижении свободных границ от них распространяются волны разрежения (разгрузки), их скорость обозначим v_2. Схематично для тела цилиндрической формы происходящее изображено на рисунке 1. За фронтом ударной волны (в пространстве между ударной волной и преградой до фронтов волн разгрузки) формируется область высокого давления. Время действия высокого давления на преграду весьма мало́ и определяется временем достижения волной разгрузки места касания (порядка времени прохождения волной расстояния от ближайшей свободной границы до области касания). Таким образом, имеются короткий пик и продолжительный установившийся участок повышенного давления (рис.2).

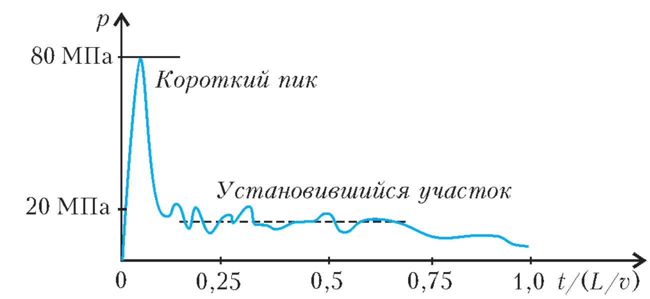


Рис.2. Давление при ударе цилиндрического тела, движущегося со скоростью 197 м/с, о тяжелую стальную плиту (деформацией плиты можно пренебречь) в зависимости от времени

Тело птицы состоит из мягких тканей (более 50% массы тела), скелета (менее 10%) и жидкости (около 40%), причем чем лучше летные качества птицы, тем меньше массовая доля скелета. Прочность костей существенно ниже величины давления при ударе. При больших скоростях столкновения тело, имеющее упруго-вязко-пластичные свойства, будет проявлять в первом приближении гидродинамические свойства (подобно удару капли или струи жидкости о преграду). Плотность мышечных тканей около 1,06 г/см^3, объемная плотность (из-за наличия полостей) ниже – около 0,87–0,9 г/см^3.

«Конструкция» птиц может быть очень легкой. Так, масса скелета фрегата при размахе крыльев 2 м всего лишь 100 г, что меньше суммарной массы его перьев! Более того, для того чтобы обеспечить правильную центровку, череп птиц имеет «прекрасно сконструированную» костистую полую структуру. Даже большой череп вороны весит менее 1% суммарного веса птицы. Тяжелые зубы отсутствуют, их роль выполняет зоб – расположенный вблизи центра масс мускульный мешок, в который на земле набираются камешки для измельчения пищи (в дальний перелет эти «зубы» не берутся).

Птицы нуждаются в быстром обмене веществ, скорость которого удваивается с повышением температуры на 10 °С. Следствием быстрого обмена веществ является высокое потребление кислорода, что обеспечивается сложной конструкцией легких, соединенных с системой воздушных мешков, расположенных в различных частях тела, включая полые кости. Это помогает легким в нагнетании воздуха и используется в системе охлаждения. Так, летящий голубь использует четверть вдыхаемого воздуха для дыхания, а остальной – для охлаждения. Дыхательная система утки занимает 20% объема тела (для сравнения, у человека всего лишь 5%), из них 18% приходятся на воздушные мешки и только 2% на собственно легкие.

Пористость среды существенно снижает скорость ударной волны (см., например, статью А.Стасенко «Звук в пене» в «Кванте» №4 за 2004 г.). В теле птицы жидкая фаза разделена клеточной структурой (мембранами клеток) и большими воздушными полостями дыхательной системы и системы охлаждения, что увеличивает сжимаемость и уменьшает скорость ударной волны. Поэтому при скоростном ударе ($v > 100$ м/с) в основном имеет место сверхзвуковое взаимодействие биомассы птицы с мишенью.

Кинограммы скоростной съемки удара сферической капли о плоскую преграду показывают, что задняя часть капли сохраняет прежнюю форму, в то время как передняя деформируется и растекается по преграде. Фронт ударной волны, возникающей в капле при касании мишени, достигает задней части практически одновременно с достижением этой частью мишени, т.е. продолжительность удара определяется временем пролета капли своей длины, т.е. отношением L/V (L – длина тела птицы).

В первом приближении можно использовать одномерную модель движения для оценки максимального возникающего давления $p_{\max}$ за время действия Δt. Масса жидкости на единицу площади преграды, заторможенная при ударе, равна $\rho v_1 \Delta t$, где ρ – плотность жидкости, v_1 – скорость ударной волны (вот почему важно знать пористость и состояние среды «снаряда»). Импульс (количество движения) этой массы равен $\rho v_1 \Delta t v$, где v – скорость жидкости до удара о преграду. Импульс силы равен изменению импульса тела, поэтому

$$p_{\max}\Delta t = \rho v_1 \Delta t v .$$

Отсюда для оценки ударного давления, так называемого давления Гюгонио, получаем

$$p_{\max} = \rho v_1 v .$$

Время действия этого давления мало по сравнению с полным временем удара жидкого объема.

Оценим скорость ударной волны при ударе о преграду, используя данные рисунка 2:

$$p_{\max} = 80 \text{ МПа} = 80\cdot 10^6 \text{ Н/м}^2, \quad \rho = 900 \text{ кг/м}^3,$$

$$v = 197 \text{ м/с}, \text{ и } v_1 = \frac{p_{\max}}{\rho v} = 451 \text{ м/с}.$$

После прихода волны разгрузки устанавливается так называемое квазиструйное течение. На этой фазе давление (струи на неподвижную преграду) можно оценить из закона сохранения энергии. Работа силы давления pS за время Δt равна энергии торможения столба жидкости длиной $v\Delta t$ и площадью S:

$$pSv\Delta t = \frac{Sv\Delta t\rho v^2}{2}, \text{ откуда } p = \frac{\rho v^2}{2}.$$

Данное соотношение верно, строго говоря, только для центральной струйки, которая полностью гасит свою кинематическую энергию. Оценим это давление:

$$p = 900 \text{ кг/м}^3 \cdot \frac{(197 \text{ м/с})^2}{2} = 17{,}5 \text{ МПа}$$

(сравните с данными рисунка 2).

Для справки, скорость звука при 20 °С в воде 1482,7 м/с, в стали 5000–5200 м/с (одномерная волна в стержне) или 5680–6100 м/с (продольная волна). В частности, очевидно, что давление Гюгонио для стальной болванки при тех же скоростях столкновения будет раза в четыре выше. Скорость звука при 0 °С во льду 3280 м/с (одномерная волна в стержне) или 3980 м/с (продольная волна). Так что мороженная курица создала бы при тех же условиях приблизительно в 7,3 раза большее максимальное давление.

Следует помнить, что ударная волна (сильные возмущения) распространяется в среде с большей скоростью, чем звуковая волна (малые возмущения). Так, скорость ударной волны в воде при 20 °С равна 3354 м/с при перепаде давления в волне $\Delta p = 3140 \text{ МПа} = 32000 \text{ атм}$. На рисунке 3 приведен график зависимости скорости ударной волны в

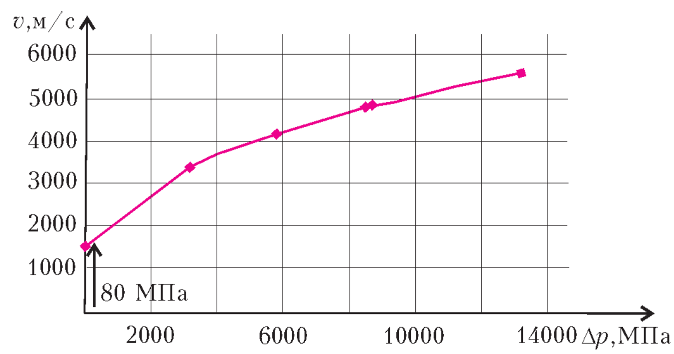


Рис.3. Скорость ударной волны в зависимости от перепада давления на ней (справочные данные)

воде от перепада давления (величины возмущения). Таким образом, случай, соответствующий рисунку 2, т.е. $\Delta p \sim p_{\max} = 80$ МПа, близок к малым возмущениям, и для оценок можно использовать скорость звука (но не в воде!). У нас из-за пористости среды получилось $v_1 = 451$ м/с, для воды было бы в 3,3 раза выше – около 1500 м/с.

Но, конечно, птица – не совсем круговой цилиндр, и одномерная модель является весьма грубой. Поэтому более строгая математическая модель удара птицы о преграду использует жидкий объем в форме эллипсоида вращения. Кроме того, податливость преграды уменьшает давление: $p = \rho(v - w)^2/2$, где w – скорость преграды (эту формулу предлагается получить самостоятельно). Можно рассмотреть еще случай косого удара. Здесь разумно взять нормальную к поверхности преграды составляющую скорости и для оценок использовать те же формулы.

Желаем успеха!

Игры

В этом калейдоскопе мы собрали несколько математических игр, многие их которых уже вошли в фольклор математических кружков.

Во всех наших играх всегда играют двое, ходы делают по очереди. Проигрывает (если про это ничего не сказано) тот, кто не может сделать ход.

Для краткости мы не будем в каждой задаче приводить один и тот же вопрос: кто из игроков – начинающий или его партнер – может действовать так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл другой? (Иногда этот вопрос кратко формулируют так – кто выигрывает при правильной игре?) Если в задаче ничего не спрашивается, то этот вопрос подразумевается.

Некоторые задачи мы разбираем, остальные оставляем для самостоятельного решения. Играйте!

Нечестные игры

Бывают игры, в которых результат не зависит от действий игроков – играть в них неинтересно.

1. *Коля и Вася по очереди ломают шоколадку 6×8. Начинает Коля, за ход любой из имеющихся кусков ломается по прямой (вдоль углубления) на два куска. Выигрывает тот, кто сделал последний разлом.*

Заметим, что после каждого разлома число кусков шоколадки увеличивается на 1. Сначала был один кусок, а в конце их будет 48. После ходов Коли всегда получается четное число кусков, а после ходов Васи – нечетное. Значит, выиграет Коля.

2. *Петя и Вася играют в игру: есть кучка из 777 спичек, за ход берут 7 или 77 спичек. Начинает Петя.*

Симметрия

Иногда игрок выигрывает с помощью «симметричной стратегии»: например, дублирует ход соперника.

3. *Малыш и Карлсон по очереди кладут пятаки на круглый стол так, чтобы они не накладывались друг на друга. Начинает Карлсон.*

Пусть Карлсон первым ходом положит пятак в центр стола. Тогда на каждый ход Малыша он сможет положить пятак симметрично пятаку Малыша относительно центра стола (рис. 1), и пока ходы есть у Малыша, они будут и у Карлсона.

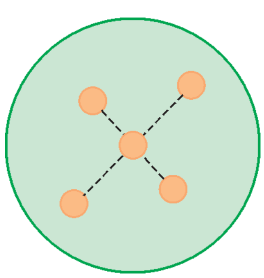


Рис. 1

4. *Есть две кучи камней: а) в каждой по 20; б) в одной – 30, в другой – 20. Двое по очереди берут любое число камней из любой кучи (но не из двух сразу). в) А если есть 3 кучи (или 4 кучи) по 20 камней?*

5. *У ромашки а) 12; б) 11 лепестков. В свой ход игрок обрывает 1 или 2 рядом растущих лепестка.*

6. *Двое играют на доске $m\times n$. В первом столбце стоят фишки первого игрока, а в последнем столбце – фишки второго. На своем ходу игрок может передвинуть свою фишку в строке, не отрывая ее от доски, в любую сторону на любую свободную клетку (перепрыгивать через другие фишки запрещено).*

Ответный ход

В задачах этого раздела можно указать стратегию игрока, который выигрывает. Чтобы ее найти, полезно бывает рассмотреть частные случаи или упростить задачу (например, решить задачу 9 сначала для случая, когда в коробке 12, 13, 14, ... конфет).

7. *В куче 2010 камней. Двое по очереди берут себе по а) 1 или 2; б) 1 или 3; в) 1 или m камней.*

В пункте а) второй игрок всегда может своим ходом дополнять число только что взятых соперником камней до 3. Тогда после хода второго число камней всегда будет делиться на 3, а после хода первого – нет. Так как 2010 делится на 3, последний ход сделает второй игрок.

8. *На крайней правой клетке доски 1×20 стоит фишка. Два игрока по очереди сдвигают эту фишку (вправо или влево) на любое число клеток, которое еще не встречалось при выполнении предыдущих ходов.*

9. *В коробке 100 конфет. Двое по очереди берут себе из коробки 1, 10 или 11 конфет.*

10. *Дана полоска 1×2009. а) В двух; б) в трех; в) в n самых правых клетках стоит по фишке. Игрок своим ходом переставляет одну из фишек влево на любую незанятую клетку (можно перепрыгивать через другие фишки).*

Разберем пункт а) этой задачи. Разделим полоску, как показано на рисунке 2, на доминошки размером 1×2, начиная с самой левой клетки, и еще одна клетка будет в остатке (самая правая).

Рис. 2

Первый выиграет, если будет придерживаться такой стратегии: каждым ходом он должен переставлять правую фишку в ту же доминошку, где стоит другая фишка.

Анализ с конца

Назовем позиции, из которых игрок выигрывает одним ходом, *выигрышными*. Если игрок своим ходом обязательно попадает в такую позицию, то он находится в *проигрышной* позиции (после его хода соперник выиграет). Если же игрок своим ходом может попасть в проигрышную позицию, то он в выигрышной позиции (сможет выиграть). Последовательно находя выигрышные и проигрышные позиции, *начиная с конца*, можно узнать, кто выиграет, и найти стратегию.

11. *В левом нижнем углу шахматной доски 8×8 стоит король. Двое по очереди передвигают его по доске на одну клетку либо вправо, либо вверх, либо по диагонали «вправо–вверх».*

Если король стоит в правом верхнем углу доски и ход наш, то мы проиграли. Отметим эту позицию буквой «П», как проигрышную. Пусть теперь король стоит на одной из трех клеток, соседних с только что отмеченной. Тогда мы можем смело ходить на проигрышную клетку. Ведь будет ход соперника и он проиграет! Поэтому отметим эти три клетки буквой «В», как выигрышные (рис. 3,*а*).

Теперь можем отметить еще две клетки буквой «П» (рис. 3,*б*), так как с них можно сделать ход только на выигрышные клетки. Продолжая заполнять доску (рис. 3,*в*), дойдем до левой нижней клетки. Там будет буква «В» (проверьте). Значит, выигрывает первый.

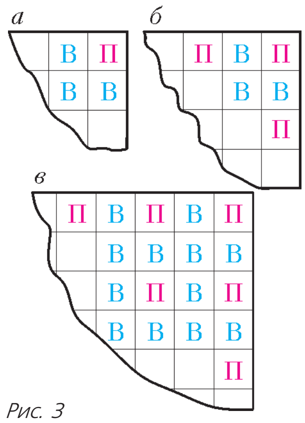


Рис. 3

12. *В коробке 300 спичек. Двое по очереди берут из коробка не более половины имеющихся в нем спичек.*

13. *Ферзь стоит в левом нижнем углу клетчатой доски 10×12. Двое по очереди передвигают его по доске на любое число клеток вправо, вверх или по диагонали «вправо—вверх».*

Геометрия

14. *В клетчатом квадрате 10×10 двое по очереди ставят фигурки. Первый ставит квадрат 2×2, второй — уголок из трех клеток (так, что фигурки занимают целое число клеток и не перекрываются).*

В этой задаче не помогут обычные приемы. Но решается она очень просто. Пусть после начального хода первого игрока второй поставит «уголок» рядом с одним из углов доски так, как показано на рисунке 4 (это, очевидно, всегда возможно). Прямо над поставленным «уголком» есть место из трех клеток как раз еще для одного «уголка», причем ни одну из этих клеток не может занять первый игрок. Пусть второй будет далее ходить по правилам куда угодно, не занимая только ни одной из тех трех клеток над первым своим «уголком», пока это возможно. Если вдруг он не может сделать такого хода, то на доске не осталось места и для хода первого игрока. Тогда второй ставит «уголок» над первым своим «уголком» и выигрывает.

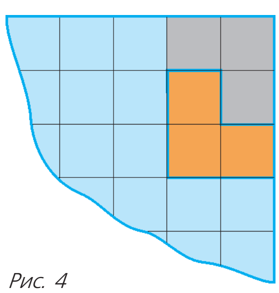


Рис. 4

15. *На бесконечной доске играют в крестики-нолики. Выиграет тот, кто поставит 5 своих знаков в ряд по вертикали или горизонтали. Докажите, что при правильной игре второй а) не выиграет; б) не проиграет.*

Решим пункт б). Разобьем доску на доминошки так, как показано на рисунке 5. Заметим, что любой ряд из пяти клеток на доске целиком содержит какую-то доминошку. Докажите, что второй не проиграет, если каждым своим ходом будет ставить нолик в ту доминошку, куда только что поставил крестик первый игрок.

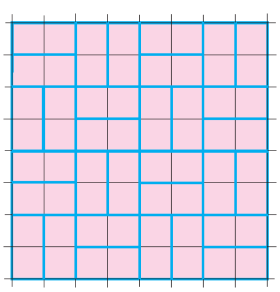


Рис. 5

16. *На клетчатой доске 2009×2009 в центре стоит фишка. Двое по очереди передвигают фишку на одну из соседних (по стороне) клеток, если эта клетка ранее ни разу не была занята фишкой.*

Передача хода

В задачах этого раздела можно узнать, кто выигрывает при правильной игре, не указывая стратегию. Подумайте, почему в этих играх у одного из игроков стратегия вообще существует (выигрышная или не проигрышная).

17. *(Двойные шахматы) Двое играют в шахматы, но делают по два хода сразу. Есть ли у второго выигрышная стратегия?*

Предположим, что второй игрок имеет выигрышную стратегию. Пусть первый игрок начнет с хода конем «туда-обратно». На доске ничего не изменится, но ход перейдет ко второму игроку, и игроки как бы поменяются местами. И получается, что уже другой игрок имеет выигрышную стратегию. Поэтому второй не сможет выиграть (если первый будет играть правильно).

18. *Прямоугольная шоколадка разделена бороздками на дольки. Игрок своим ходом выбирает любую еще не съеденную дольку и съедает ее вместе со всеми дольками, расположенными от выбранной не ниже и не левее. Съевший последнюю дольку проигрывает.*

19. *Написаны числа 1, 2, 3, ..., 1000. За ход игрок вычеркивает какое-нибудь число и все его делители.*

20. *Фома и Ерема делят 25 монет в 1, 2, ..., 25 алтынов. За ход один выбирает монету, а другой говорит, кому ее отдать. Сначала выбирает Фома, далее — тот, у кого больше алтынов, при равенстве — тот, кто и в прошлый раз. Может ли Фома играть так, чтобы в итоге обязательно получить больше алтынов, чем Ерема?*

Разное

21. *Белая ладья преследует черного слона на доске размером 3×100 (ходят по очереди по обычным правилам, начинают белые). Как играть ладье, чтобы взять слона?*

22. *Король за ход ставит по крестику в любые две свободные клетки бесконечного листа бумаги. Министр за ход ставит нолик в любую свободную клетку. Сможет ли король поставить 100 крестиков в ряд?*

23. *(Игра «Ним») Имеется три кучки камней: а) 7, 8 и 9; б) любые кучки. Двое по очереди берут любое количество камней из одной кучки. Выигрывает взявший последний камень.*

24. *Сначала на доске написано число 2009!. Игрок в свой ход вычитает из написанного числа какое-нибудь натуральное число, которое делится не более чем на 20 разных простых чисел (так, чтобы разность была неотрицательна), записывает на доске эту разность, а старое число стирает. Выигрывает тот, кто получит 0.*

Исследовательская задача *(А.Перепечко). В куче N камней. Двое берут камни по очереди. На первом ходу первый игрок берет один камень. Каждым следующим ходом игрок берет либо столько же камней, сколько брал его соперник на предыдущем ходу, либо на один больше.*

Решение этой задачи нам неизвестно.

Материал подготовили
С.Дориченко, М.Прасолов

От прямой Симсона до теоремы Дроз-Фарни

Д.ШВЕЦОВ

Элементарная геометрия буквально усыпана красивыми жемчужинами, которые доставляют огромное удовольствие тем, кто ими любуется. Тем поразительнее, что и сами по себе эти факты могут выступать в качестве вспомогательных утверждений для доказательства других теорем.

Прямая Уоллеса–Симсона

Начнем мы наш тур с *прямой Симсона*. [1]

Основания перпендикуляров, опущенных из точки S описанной окружности треугольника ABC на его стороны или их продолжения, лежат на одной прямой, которая называется прямой Симсона точки S относительно треугольника ABC (рис.1).

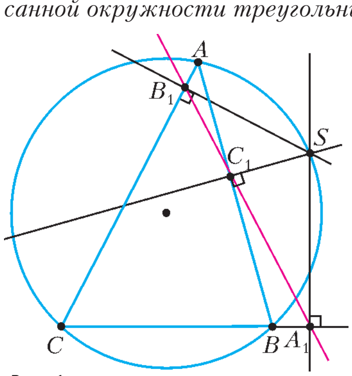


Рис. 1

Доказательство. Если мы покажем, что $\angle B_1C_1A = \angle BC_1A_1$, то наше утверждение будет доказано. В доказательстве во всей красе показывает себя метод «вспомогательной окружности». Что это значит?

Краткости ради введем обозначения: $\angle B_1C_1A = \alpha$ и $\angle BC_1A_1 = \beta$ (рис.2). Точки B_1, C_1, A и S лежат на одной окружности с диаметром AS (почему?). Следовательно,

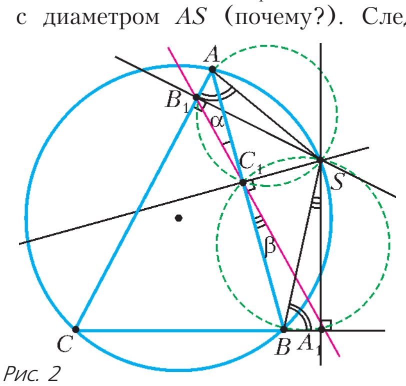


Рис. 2

$\angle B_1C_1A = \angle B_1SA = \alpha$ (так как оба этих угла «смотрят» на дугу B_1A). Тогда из треугольника B_1SA заметим, что $\angle B_1AS = 90° - \alpha$. Четырехугольник $CASB$ вписан в окружность, поэтому

$$\angle CAS + \angle CBS = 180° \Rightarrow \angle SBC = 90° + \alpha \Rightarrow \angle SBA_1 = 90° - \alpha.$$

Аналогично, из прямоугольного треугольника SBA_1 находим, что $\angle BSA_1 = \alpha$. Осталось лишь заметить, что точки C_1, B, A_1 и S лежат на одной окружности с диаметром BS. Откуда следует равенство углов $\angle BSA_1 = \angle A_1C_1B$ (оба «смотрят» на дугу BA_1). Таким образом, получили, что $\alpha = \beta$.

Нам удалось доказать теорему.

Упражнение 1. Две окружности пересекаются в точках M и N. Через точки M и N проводятся прямые, пересекающие окружности в точках A и B, C и D соответственно. Докажите, что $AC \parallel BD$.

Верно и обратное утверждение.

Если основания перпендикуляров, опущенных из некоторой точки S на стороны треугольника или их продолжения, лежат на одной прямой, то точка S лежит на описанной окружности треугольника.

Упражнение 2. Докажите это.

Прямая Симсона обладает многими свойствами, некоторые из них сформулированы в виде задач в конце статьи.

Оказывается, существует *обобщение прямой Симсона*.

Проекции точки P описанной окружности четырехугольника ABCD на прямые Симсона этой точки относительно треугольников BCD, CDA, DAB и BAC лежат на одной прямой (прямая Симсона вписанного четырехугольника).

Доказательство. Обозначим через B_1, C_1 и D_1 проекции точки P на прямые AB, AC и AD (рис.3). Опять же замечаем, что точки A, B_1, P, C_1 и D_1 лежат на одной окружности с

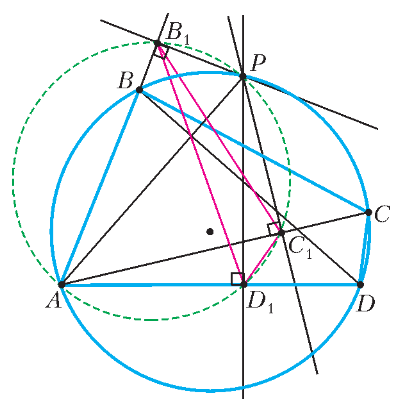


Рис. 3

диаметром AP. С другой стороны, вспомнив определение прямой Симсона для треугольника, получим, что прямые B_1C_1, C_1D_1 и D_1B_1 являются прямыми Симсона точки P относительно треугольников ABC, ACD и ADB соответственно. Теперь – последнее усилие.

Заметим, что проекции точки P на прямые Симсона этих треугольников лежат на одной прямой – прямой Симсона треугольника $B_1C_1D_1$. Точно так же можно показать, что на одной прямой лежит любая тройка рассматриваемых точек, следовательно, и все они лежат на одной прямой.

Любовь к обобщениям привела исследователей к следующему результату.

По индукции можно определить прямую Симсона вписанного n-угольника как прямую, содержащую проекции точки

[1] Открытие этой прямой долго приписывалось Роберту Симсону (1687–1768), но в действительности она была открыта лишь в 1797 году Вильямом Уоллесом (1768–1843).

P на прямые Симсона всех $(n-1)$-угольников, полученных выбрасыванием одной из вершин n-угольника.

Для примера разберем прямую Симсона для пятиугольника. Итак, пусть есть пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$. Сначала «выбрасываем» вершину A_1, тогда останется четырехугольник $A_2A_3A_4A_5$, а для него прямая Симсона уже определена. Аналогично возникают еще четыре прямые Симсона (по очереди выбрасываем вершины A_2, A_3, A_4, A_5). Так вот, проекции произвольной точки P описанной окружности на эти пять прямых лежат на одной прямой. Аналогичное утверждение верно и для произвольного n-угольника.

Упражнение 3. Докажите это утверждение для пятиугольника.

Прямая Штейнера

С прямой Симсона естественным образом связана другая прямая – *прямая Штейнера*.

Точку R описанной окружности треугольника ABC отразили симметрично относительно сторон треугольника. Полученные три точки будут лежать на одной прямой, которая называется прямой Штейнера точки R относительно треугольника ABC.

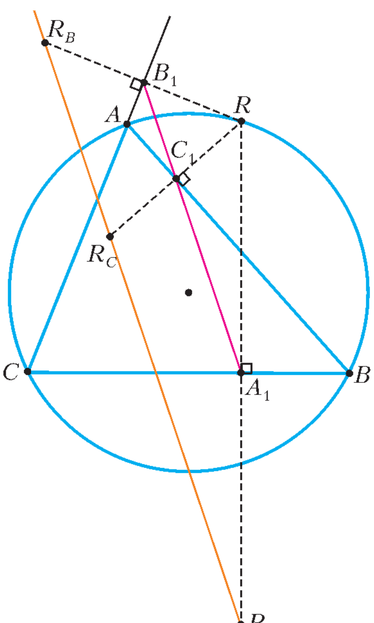


Рис. 4

Для начала поймем, почему же эти точки будут лежать на одной прямой (рис.4). Точки B_1, C_1, A_1 лежат на одной прямой, ибо это прямая Симсона. Точки же R_B, R_C, R_A находятся от точки R в два раза дальше, чем точки B_1, C_1, A_1, поэтому они тоже лежат на одной прямой, причем она параллельна прямой Симсона.

Чем же интересна прямая Штейнера?

Прямая Штейнера проходит через ортоцентр (точку пересечения высот) треугольника.

Доказательство. Здесь уже совсем просто не получится, нужны некоторые «хитрости». Итак, пусть прямая Штейнера точки R относительно треугольника ABC пересекает высоту CC' в точке H (рис.5). Наша цель – показать, что точка H есть ортоцентр. Как это сделать, сразу не разглядеть. Но оказывается, что ортоцентр обладает следующим свойством-признаком.

Если ортоцентр треугольника отразить симметрично относительно сторон треугольника, то полученные точки лежат на описанной окружности треугольника.

Докажем это свойство. Нам достаточно показать, что $\angle ACB + \angle AQB = 180°$ (рис.6).[2] Но $\angle CB'H + \angle CA'H = 90° + 90° = 180° \Rightarrow$ $\angle B'CA' + \angle A'HB' = 180° \Rightarrow$ $\angle B'CA' + \angle AHB = 180°$. А вот точку Q мы получали в результате

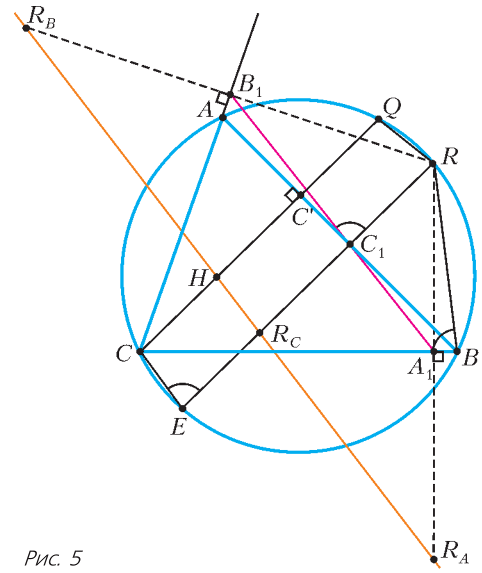


Рис. 5

симметричного отражения точки H, следовательно, $\angle AHB = \angle AQB$, а поэтому $\angle ACB + \angle AQB = 180°$.

Упражнение 4. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

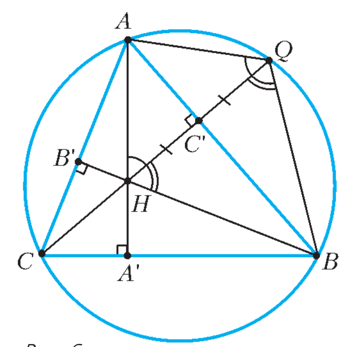


Рис. 6

Это свойство ортоцентра сыграет ключевую роль в нашем доказательстве.

Вспомним, что при доказательстве теоремы Симсона (самой первой теоремы) было показано, что четырехугольник RC_1A_1B вписанный, т.е. $\angle A_1BR + \angle A_1C_1R = 180°$, но $\angle A_1C_1R + \angle B_1C_1R = 180°$ (смежные углы) $\Rightarrow \angle B_1C_1R = \angle A_1BR$. Продлим RC_1 до пересечения с исходной окружностью в точке E. Теперь видим, что $\angle CER = \angle CBR$, ибо оба угла опираются на дугу CR. Поэтому $\angle CER = \angle B_1C_1R$, что, в свою очередь, говорит о параллельности прямых CE и B_1C_1. Однако прямые Штейнера и Симсона параллельны, т.е. $HR_C \parallel B_1C_1$.

Теперь посмотрим на четырехугольник $CERQ$ (рис. 7), где Q – точка пересечения продолжения высоты CC' с окружностью. Во-первых, этот четырехугольник является трапецией, ибо $CC' \perp C'C_1$, $ER \perp C'C_1$. Во-вторых, раз эта трапеция вписана в окружность, то трапеция равнобокая, т.е. $CE = QR$. Сейчас же видим, что четырехугольник HR_CEC является параллелограммом, так как $CH \parallel ER_C$, $CE \parallel HR_C$, следовательно, $CE = HR_C$, поэтому четырехугольник HR_CRQ – равнобокая трапеция. Вспомнив же, что C_1 – середина отрезка R_CR (так мы определяли точку R_C) и $C'C_1 \perp RR_C$, несложно понять, что $HC' = C'Q$. Наконец, используя «свойство-признак» для ортоцентра, получим что точка H является ортоцентром треугольника ABC.

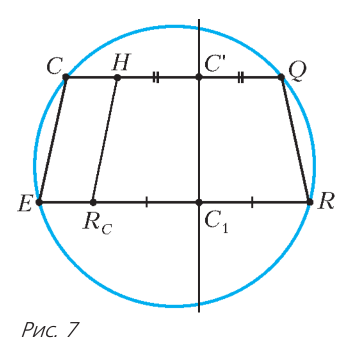


Рис. 7

[2] Здесь мы воспользуемся таким утверждением: *вокруг четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма величин его противоположных углов равна 180°.*

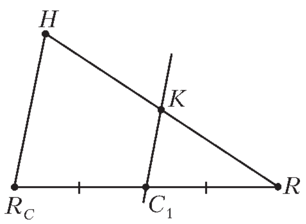


Рис. 8

Следствие 1. *Пусть точка R лежит на описанной окружности треугольника ABC, H – ортоцентр треугольника ABC. Прямая Симсона точки R делит отрезок RH пополам.*

Доказательство. В предыдущем доказательстве мы показали, что прямая Симсона точки R (C_1K на рисунке 8) параллельна прямой HR_C. Стало быть, глядя на треугольник R_CHR, по теореме о средней линии получим, что $HK = KR$.

Следствие 2. *Три прямые, симметричные прямой Штейнера точки R относительно сторон треугольника, пересекаются в точке R.*

Упражнение 5. Докажите этот факт.

Из второго следствия вытекает, что если через ортоцентр треугольника провести произвольную прямую, то прямые, симметричные ей относительно сторон треугольника, будут пересекаться в одной точке, лежащей на описанной окружности треугольника.

Точка Микеля

Пусть даны четыре прямые общего положения (никакие две не параллельны, никакие три не проходят через одну точку). При пересечении любых трех из них образуется треугольник.

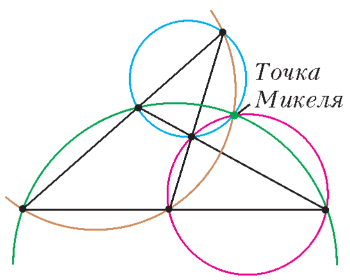


Рис. 9

Описанные окружности четырех получившихся треугольников имеют общую точку, которую называют точкой Микеля данных четырех прямых (рис.9).

Доказательство. Пусть описанные окружности треугольников BEC и CDF пересекаются в точке M (рис.10). Покажем, что эта же точка M лежит на описанной окружности треугольника AED, т.е. что четырехугольник $AEMD$ является вписанным. Для этого опять достаточно показать, что $\angle EAD + \angle EMD = 180°$. Из вписанности четырехугольника $BEMC$ заключаем, что $\angle EMC + \angle EBC = 180° \Rightarrow \angle ABC = \angle EMC$ (ведь $\angle EBC + \angle ABC = 180°$). Посмотрев же на вписанный четырехугольник $MCDF$, видим, что $\angle CMD = \angle CFD$ (опираются на дугу CD). Значит, справедлива следующая цепочка равенств:

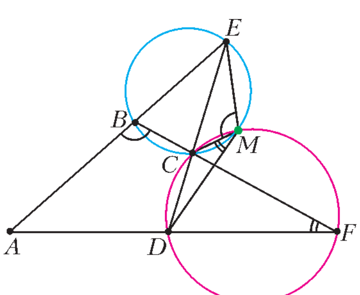


Рис. 10

$$\angle EAD + \angle EMD = \angle BAF + \angle EMC + \angle CMD = \\ = \angle BAF + \angle ABF + \angle AFB = 180°,$$

так как это углы треугольника ABF. Аналогично можно показать, что и описанная окружность треугольника ABF проходит через точку M. Доказательство завершено.

Как и прямая Симсона, точка Микеля обладает интересными свойствами, некоторые из них представлены в конце статьи в качестве задач.

Родственную задачу для геометрии треугольника можно сформулировать следующим образом.

Лемма. *Если на каждой стороне треугольника отметить по одной точке и через каждую вершину треугольника и отмеченные точки на смежных сторонах провести окружность, то три эти окружности пересекутся в одной точке (рис.11).*

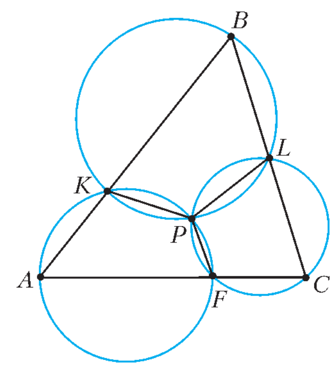


Рис. 11

Доказательство похоже на то, которое мы видели только что: нужно совершить «круиз по углам». Пусть описанные окружности треугольников AKF и BKL пересекаются в точке P. Как и выше, покажем, что окружность, описанная вокруг треугольника FCL, проходит через точку P, для чего достаточно показать равенство $\angle PFC + \angle PLC = 180°$. Из вписанности четырехугольников и свойств смежных углов получаем цепочку равенств: $\angle AKP + \angle AFP = 180° \Rightarrow \angle AKP = \angle PFC$. Аналогично, $\angle BKP + \angle BLP = 180° \Rightarrow \angle BKP = \angle PLC$, но $\angle AKP + \angle BKP = 180°$, а значит, и равные им углы также дают в сумме $180°$.

Теорема Дроз-Фарни

В 1899 году Арнольд Дроз-Фарни опубликовал без доказательства следующую теорему.

Теорема. *Пусть две взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через ортоцентр треугольника, высекают на прямых, содержащих стороны треугольника, три отрезка. Середины этих трех отрезков лежат на одной прямой (рис.12).*

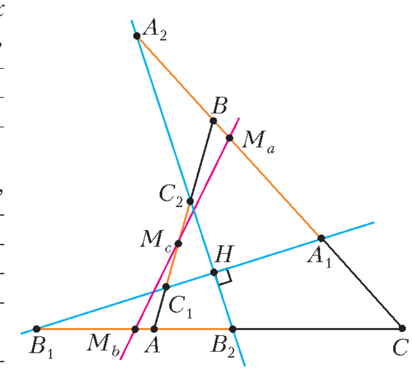


Рис. 12

Оказывается, факты, изложенные выше, причудливым образом переплетаются при доказательстве этой жемчужины геометрии.

Доказательство. Отразим ортоцентр H относительно сторон треугольника, полученные точки обозначим H_a, H_b и H_c (на рисунке 13 точка H_c не изображена).

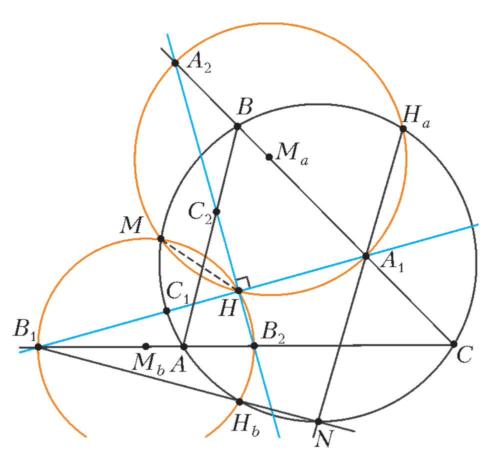


Рис. 13

Далее, построим на отрезках A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, как на диаметрах, окружности. Назовем их Ω_A, Ω_B, Ω_C. Отметим, что точка H попадает на все эти три окружности (почему так?). Точки же M_a, M_b и M_c являются центрами этих окружностей, так как они середины диаметров. К тому же точки H_a, H_b и H_c лежат на окружности, описанной вокруг треугольника ABC («свойство-признак» для ортоцентра). Согласно следствию 2 из сюжета о прямой Штейнера получаем, что прямые B_1H_b и A_1H_a пересекаются на описанной окружности треугольника ABC, обозначим точку пересечения через N.

Осталось последнее усилие. Рассмотрим треугольник B_1NA_1 и точки H_b, H, H_a, которые лежат на его сторонах (или их продолжениях). Применив для него лемму из предыдущей части, получаем, что описанная окружность треугольника ABC и окружности Ω_A, Ω_B пересекаются в одной точке M. Аналогично получим, что и окружность Ω_C проходит через ту же самую точку M! Суммируя все, получим, что три окружности Ω_A, Ω_B, Ω_C пересекаются в двух общих точках M и H (рис.14). Но центр каждой окружности лежит на серединном перпендикуляре к хорде MH. Тем самым, все три точки M_a, M_b, M_c лежат на одной прямой.

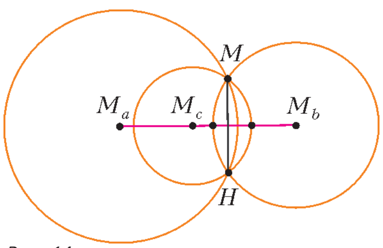


Рис. 14

Заключение

Элементарная геометрия *никогда* не стоит на месте. Не так давно румынский математик Космин Похоата и болгарский математик Николай Белухов разными путями доказали следующее обобщение теоремы Дроз-Фарни.

Дан треугольник ABC, точка P и проходящая через нее прямая d. Прямая, симметричная AP относительно d, пересекает BC в точке A'. Точки B', C' определены аналогично. Тогда A', B', C' лежат на одной прямой (рис.15).

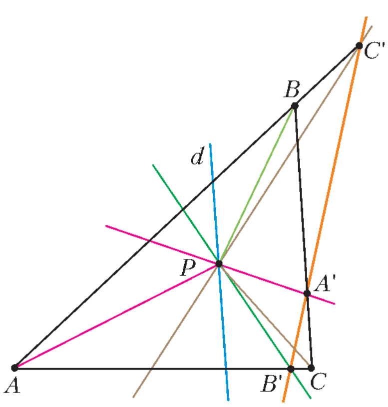


Рис. 15

Известные доказательства не совсем элементарны в том смысле, что используют *геометрию коник* и *проективные преобразования*. Поэтому здесь мы не будем приводить доказательства. Если в качестве P взять ортоцентр треугольника и в качестве d взять биссектрису между перпендикулярными прямыми, то получим обычную теорему Дроз-Фарни. Действительно, в прямоугольном треугольнике B_1HB_2 (см. рис.12) биссектриса угла B_1HB_2 также делит пополам угол между высотой и медианой, проведенными из вершины H. Поэтому после симметрии относительно биссектрисы угла B_1HB_2 прямая BH перейдет в прямую HM_b. Аналогично для двух других пар прямых.

Другое обобщение теоремы Дроз-Фарни можно найти в задаче 12.

Задачи

Предлагаем вам для самостоятельного решения задачи о прямой Симсона и точке Микеля. Некоторые из них считаются классикой, другие менее известны.

1. Точки A, B и C лежат на одной прямой, точка P – вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP, BCP, ACP и точка P лежат на одной окружности.

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD и из точки D опущены перпендикуляры DB_1 и DC_1 на прямые AC и AB; точка M лежит на прямой B_1C_1, причем $DM \perp BC$. Докажите, что точка M лежит на медиане AA_1.

3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность; l_a – прямая Симсона точки A относительно треугольника BCD, прямые l_b, l_c и l_d определяются аналогично. Докажите, что эти четыре прямые пересекаются в одной точке.

4. Точка P движется по описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что при этом прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC поворачивается на угол, равный половине угловой величины дуги, пройденной точкой P.

5. Докажите, что прямые Симсона двух диаметрально противоположных точек описанной окружности треугольника ABC перпендикулярны, а их точка пересечения лежит на окружности Эйлера.[3]

6. Докажите, что существуют ровно три точки на описанной окружности, для которых прямая Симсона касается окружности Эйлера, причем эти точки образуют равносторонний треугольник.

7. Докажите, что прямая Симсона точки P, лежащей на описанной окружности треугольника ABC, перпендикулярна прямым, симметричным прямым PA, PB, PC относительно биссектрис углов A, B, C треугольника ABC соответственно.

8 (А.Акопян, LXIX Московская математическая олимпиада). Дан треугольник ABC и точки P и Q, лежащие на его описанной окружности. Точку P отразили относительно прямой BC и получили точку P_a. Точку пересечения прямых QP_a и BC обозначим A_1. Точки B_1 и C_1 строятся аналогично. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

9. Четыре прямые образуют четыре треугольника. Докажите, что центры описанных окружностей этих треугольников лежат на одной окружности, проходящей через точку Микеля данных прямых.

10. Прямая пересекает стороны AB, BC и CA треугольника (или их продолжения) в точках C_1, B_1 и A_1; O, O_a, O_b и O_c – центры описанных окружностей треугольников ABC, AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C; H, H_a, H_b и H_c – ортоцентры этих треугольников. Докажите, что:

а) треугольники $O_aO_bO_c$ и ABC подобны;

б) серединные перпендикуляры к отрезкам OH, O_aH_a, O_bH_b и O_cH_c пересекаются в одной точке.

11. Четырехугольник $ABCD$ вписанный. Докажите, что точка Микеля для прямых, содержащих его стороны, лежит на отрезке, соединяющем точки пересечения продолжений сторон. (Сравните эту задачу с леммой из текста.)

12. В условиях теоремы Дроз–Фарни (см. рис.12) возьмем точки M_a, M_b, M_c на отрезках A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 так, чтобы

$$\frac{A_1M_a}{A_2M_a} = \frac{B_1M_b}{B_2M_b} = \frac{C_1M_c}{C_2M_c}.$$

Тогда точки M_a, M_b, M_c лежат на одной прямой.

[3] В любом треугольнике середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности, которая называется окружностью Эйлера или окружностью девяти точек.

Перезарядка конденсаторов

А.ЧЕРНОУЦАН

Задачи на перезарядку конденсаторов, в которых в результате замыкания ключа или изменения параметров элементов системы (например, емкости одного из конденсаторов) происходит перераспределение зарядов конденсаторов, можно условно разделить на две группы.

В задачах первой группы источник тока перед началом перезарядки отключают от системы, и он в перезарядке не участвует. Ключевым уравнением в таких задачах является закон сохранения заряда. Если в задаче требуется найти какую-то энергетическую характеристику (выделившееся количество теплоты, работу при раздвигании обкладок или при извлечении диэлектрика), то искомая величина выражается через энергию заряженных конденсаторов до и после перезарядки.

В задачах второй группы источник в процессе перезарядки все время подключен к системе. Разность потенциалов на зажимах источника в результате перезарядки не изменяется и остается равной ЭДС источника. Поскольку через источник в процессе перезарядки проходит заряд, в энергетических задачах надо учитывать работу сторонних сил источника по перемещению этого заряда.

Перед тем как приступить к разбору задач первой и второй групп, напомним основные свойства параллельного и последовательного соединения конденсаторов. В связи с тем что тема «Соединение конденсаторов» не входит в настоящее время в программу ЕГЭ, во многих школах ей не уделяют должного внимания (или вовсе опускают).

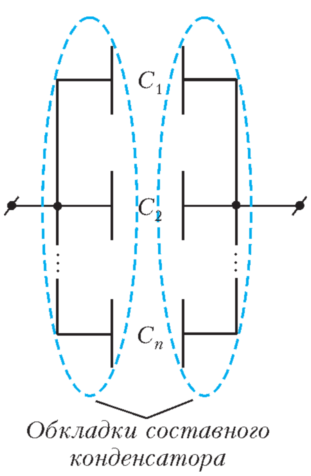


Рис. 1

При *параллельном соединении* нескольких конденсаторов берут по одной обкладке от каждого конденсатора и соединяют их проводами в единый проводник, а оставшиеся обкладки соединяют проводами в другой проводник (рис.1). Получившиеся два проводника и образуют обкладки нового, составного конденсатора. При зарядке такого конденсатора разность потенциалов между его обкладками равна разности потенциалов между обкладками каждого из образующих его конденсаторов:

$$U_{\text{сост}} = U_1 = U_2 = \ldots ,$$

а заряд составного конденсатора равен сумме зарядов всех конденсаторов:

$$q_{\text{сост}} = q_1 + q_2 + \ldots$$

Отсюда для емкости составного конденсатора получается

$$C_{\text{сост}} = C_1 + C_2 + \ldots .$$

При *последовательном соединении* одну из обкладок первого конденсатора оставляют свободной, а другую обкладку соединяют с одной из обкладок второго конденсатора, другую обкладку второго конденсатора соединяют с одной из обкладок третьего конденсатора и т.д. (рис.2). Обкладками нового, составного конденсатора являются оставшиеся свободными обкладки первого и последнего конденсаторов, на них и подают разность потенциалов при зарядке такого составного конденсатора. При этом заряды всех конденсаторов равны заряду составного конденсатора:

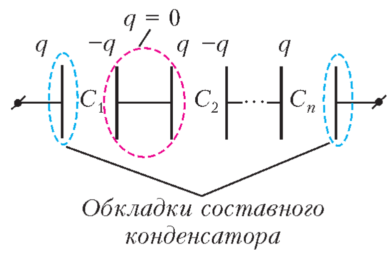


Рис. 2

$$q_{\text{сост}} = q_1 = q_2 = \ldots$$

Это утверждение следует из закона сохранения заряда и справедливо в том случае, если *до зарядки обкладки всех конденсаторов были незаряжены*; в противном случае это соотношение будет неверным. Напряжение на составном конденсаторе равно сумме напряжений на всех конденсаторах:

$$U_{\text{сост}} = U_1 + U_2 + \ldots$$

Таким образом, для емкости составного конденсатора выполняется соотношение

$$\frac{1}{C_{\text{сост}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots$$

Все приведенные формулы верны для любых конденсаторов; в частности, любой из этих конденсаторов может быть в свою очередь составным.

Отметим также, что при решении задач нам понадобятся формулы для энергии заряженного конденсатора:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} ,$$

которые верны как для простых, так и для составных конденсаторов, и формула для работы источника:

$$A_{\text{ист}} = \pm q\mathcal{E} ,$$

где знак «+» соответствует прохождению заряда q в направлении сторонних сил источника (от отрицательной клеммы к положительной).

Перейдем теперь к решению конкретных задач.

Задачи с отключенным источником

Задача 1. *Два одинаковых воздушных конденсатора соединены параллельно, заряжены и отсоединены от источника. У одного из них в 3 раза увеличивают расстояние между пластинами. Во сколько раз уменьшится напряженность поля в этом конденсаторе?*

Решение. Поскольку составной конденсатор отключен от источника, заряд на нем сохраняется. При увеличении расстояния между пластинами одного из конденсаторов в 3 раза его емкость уменьшается в 3 раза. Получаем уравнение

$$(C + C)U = \left(\frac{C}{3} + C\right)U', \quad \text{или} \quad U' = 1{,}5U,$$

где U' – конечное напряжение. Найдем теперь отношение напряженностей для первого конденсатора:

$$\frac{E_1}{E_1'} = \frac{U/d}{1{,}5U/(3d)} = 2.$$

Задача 2. *Два конденсатора, емкость одного из которых в 4 раза больше, чем емкость другого, соединили последовательно и подключили к источнику напряжения U = 75 В. Затем заряженные конденсаторы отключили от источника и друг от друга и соединили параллельно одноименно заряженными обкладками. Каким будет после этого напряжение на конденсаторах?*

Решение. Заряд на каждом из последовательно соединенных конденсаторов равен заряду первоначального составного конденсатора:

$$q = \frac{C \cdot 4C}{C + 4C}U = 0{,}8CU .$$

После того как конденсаторы соединили параллельно, заряд на новом составном конденсаторе стал равен $2q$, а напряжение теперь равно

$$U' = \frac{2q}{C + 4C} = 0{,}32U = 24 \text{ В}.$$

Задача 3. *Конденсатор емкостью $C_1 = 10$ мкФ, заряженный до напряжения $U_1 = 200$ В, соединяют параллельно с незаряженным конденсатором емкостью $C_2 = 15$ мкФ. Какое количество теплоты выделится при этом?*

Решение. Закон сохранения энергии в данном случае имеет вид

$$W_{\text{нач}} = W_{\text{кон}} + Q ,$$

где $W_{\text{нач}} = \frac{C_1U_1^2}{2} + 0$ – начальная электростатическая энергия, $W_{\text{кон}} = \frac{(C_1 + C_2)U'^2}{2}$ – конечная электростатическая энергия, Q – выделившееся количество теплоты. Конечное напряжение U' найдем из закона сохранения заряда

$$C_1U_1 + 0 = (C_1 + C_2)U' .$$

Окончательно получим

$$Q = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}\frac{U_1^2}{2} = 120 \text{ мДж}.$$

Задача 4. *Плоский воздушный конденсатор емкостью C = 6 мкФ заряжен до напряжения U = 200 В и отключен от источника. Пластины конденсаторы медленно раздвигают, увеличивая расстояние между ними в 4 раза. Какую работу при этом совершают?*

Решение. В этом случае тепло не выделяется, а работа внешних сил равна изменению электрической энергии конденсатора:

$$A = W' - W ,$$

где $W = \frac{CU^2}{2}$, а $W' = \frac{C'U'^2}{2}$. Чтобы найти U', воспользуемся законом сохранения заряда

$$CU = C'U' .$$

Таким образом,

$$A = \left(\frac{C}{C'} - 1\right)\frac{CU^2}{2} . \qquad (1)$$

Отметим, что полученный ответ годится в любом случае, когда перезарядка происходит за счет *медленного* изменения емкости системы, отключенной от источника. Поскольку в данной задаче $C' = C/4$, то

$$A = 1{,}5CU^2 = 360 \text{ мДж}.$$

Замечание. В данной задаче механическую работу можно вычислить прямым расчетом. Действительно, сила притяжения пластин равна

$$F = qE_1 = \frac{qE}{2} ,$$

где E_1 – напряженность поля одной пластины. Так как заряд конденсатора и напряженность поля остаются постоянными, то и сила притяжения пластин не меняется при их раздвигании. В таком случае работа внешних сил равна

$$A = F(d' - d) = \frac{qE}{2}(d' - d) = \frac{qU'}{2} - \frac{qU}{2} .$$

Задача 5. *Стеклянная пластина целиком заполняет зазор между обкладками плоского конденсатора, емкость которого в отсутствие пластины C = 2 мкФ. Конденсатор зарядили от источника напряжения U = 1000 В, после чего отключили от источника. Найдите механическую работу, которую необходимо совершить против электрических сил, чтобы извлечь пластину из конденсатора. Диэлектрическая проницаемость стекла $\varepsilon = 2$.*

Решение. Работа внешних сил равна изменению энергии системы, в данном случае – изменению электростатической энергии конденсатора:

$$A = W' - W ,$$

где $W = \frac{(\varepsilon C)U^2}{2}$ – начальная энергия, $W = \frac{CU'^2}{2}$ – конечная энергия. Конечное напряжение найдем из закона сохранения заряда

$$(\varepsilon C)U = CU' .$$

Окончательно получим

$$A = \frac{\varepsilon(\varepsilon - 1)CU^2}{2} = 2 \text{ Дж}.$$

Отметим, что этот ответ является частным случаем общего ответа (1), полученного в задаче 4.

Замечание. В этой задаче, в отличие от предыдущей, не удается вычислить механическую работу «в лоб», исходя из определения. Более того, сам механизм возникновения силы, которая втягивает пластину внутрь конденсатора, весьма нетривиален: в отсутствие искривления поля у краев конденсатора, т.е. краевого эффекта, сила была бы равна нулю, поскольку напряженность поля всюду перпендикулярна поверхности диэлектрической пластины. Замечательным свойством энергетического расчета является то, что он автоматически учитывает краевой эффект, хотя при выводе формулы для энергии конденсатора краевым эффектом пренебрегают.

Задача 6. *Два одинаковых по размерам плоских конденсатора соединены параллельно, заряжены до напряжения U = = 200 В и отключены от источника напряжения. Один из конденсаторов пуст, а другой содержит стеклянную пластину, целиком заполняющую зазор между его обкладками. Какую работу надо совершить, чтобы медленно извлечь пластину из конденсатора, если емкость пустого конденсатора $C_1 = 6$ мкФ? Диэлектрическая проницаемость стекла $\varepsilon = 1{,}5$.*

Решение. Сама по себе эта задача не представляет собой ничего принципиально нового по сравнению с двумя предыдущими. К ней применима общая схема, рассмотренная в задаче 4, где

$$C = C_1 + \varepsilon C_1, \; C' = 2C_1,$$

откуда

$$A = W' - W = \frac{\left(\varepsilon^2 - 1\right)C_1U^2}{4} = 75 \text{ мДж}.$$

Мы же на примере этой задаче обсудим, зачем в условиях задач оговаривается, что совершать работу (вынимать пластину, раздвигать обкладки и т.п.) надо *медленно*. А что будет, если мы выдернем пластину быстро? Во-первых, кроме изменения электрической энергии, увеличится еще и кинетическая энергия пластины. Однако если договориться, что нужно найти работу от начального положения до момента, когда мы остановим пластину, то изменение кинетической энергии будет равно нулю. Во-вторых, если (как в данной задаче) изменение емкости сопровождается перераспределением зарядов между конденсаторами, то более быстрое перераспределение зарядов сопровождается протеканием большего тока и выделением большего джоулева тепла в соединительных проводах. (При неограниченном увеличении времени перезарядки t количество теплоты $Q = (q/t)^2 Rt = q^2R/t$ стремится к нулю.) Вычислить выделившееся количество теплоты сложно, и иногда его просто задают в условии. Закон сохранения энергии в этом случае принимает вид

$$A' = (W' + Q) - W.$$

Выделившееся тепло можно вычислить в противоположном предельном случае – когда пластину извлекают столь быстро, что заряды на обкладках конденсаторов не успевают измениться (для этого в цепь перезарядки должно быть включено очень большое сопротивление). В этом случае задача как бы разбивается на две. Сначала извлекается пластина и совершается работа при неизменном заряде конденсатора (задача 5):

$$A' = \frac{\varepsilon(\varepsilon - 1)C_1U^2}{2} = 90 \text{ мДж},$$

а затем перераспределяются заряды (аналогично задаче 2) и выделяется тепло. Впрочем, в данной задаче можно сразу догадаться, что $Q = 15$ мДж (подумайте, почему).

Задачи с подключенным источником

Задача 7. *Два одинаковых воздушных конденсатора соединены последовательно и присоединены к источнику постоянного напряжения. У одного из них втрое увеличивают расстояние между пластинами. Во сколько раз уменьшится напряженность поля в этом конденсаторе?*

Решение. Поскольку система подключена к источнику, напряжение на ней не меняется и остается равным напряжению источника U. Выразим через U начальное и конечное напряжения на первом конденсаторе:

$$U_1 = \frac{U}{2}, \quad U_1' = \frac{q'}{C_1'} = \frac{1}{C_1'}\frac{C_1'CU}{C_1' + C} = \frac{CU}{(C/3) + C} = 0{,}75U.$$

Отношение напряженностей выражается через отношение напряжений:

$$E_1 = \frac{U/2}{d} = \frac{U}{2d}, \quad E_1' = \frac{0{,}75U}{3d} = \frac{U}{4d}, \quad \frac{E_1}{E_1'} = 2.$$

Задача 8. *Незаряженный конденсатор емкостью $C = 4$ мкФ присоединили к зажимам источника тока с ЭДС $\mathcal{E} = 200$ В. Сколько тепла выделилось в процессе зарядки конденсатора?*

Решение. Закон сохранения энергии надо записывать с учетом работы сторонних сил источника и изменения как электрической, так и внутренней энергии (т.е. количества теплоты, выделившегося при зарядке):

$$A_{\text{ист}} = (W' + Q) - W. \qquad (2)$$

В данной задаче

$$W = 0, \quad W' = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}, \quad A_{\text{ист}} = \Delta q\mathcal{E} = (C\mathcal{E} - 0)\mathcal{E} = C\mathcal{E}^2.$$

Здесь Δq – заряд, прошедший через источник в положительном направлении, равный изменению заряда обкладки, присоединенной к положительному полюсу источника. Получаем

$$C\mathcal{E}^2 = \left(\frac{C\mathcal{E}^2}{2} - 0\right) + Q,$$

откуда

$$Q = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} = 80 \text{ мДж}.$$

Видно, что КПД такой зарядки составляет 50%.

Задача 9. *Конденсатор емкостью $C = 8$ мкФ, заряженный до напряжения $U = 100$ В, присоединили для подзарядки к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 200$ В. Какое количество теплоты выделилось при подзарядке?*

Решение. Новое напряжение на конденсаторе равно $U' = \mathcal{E}$, заряд на конденсаторе изменился на $\Delta q = CU' - CU$, работа сторонних сил источника равна $A_{\text{ист}} = \mathcal{E}\Delta q = C\mathcal{E}^2 - C\mathcal{E}U$. Запишем закон сохранения энергии:

$$A_{\text{ист}} = \Delta W + Q,$$

где изменение электрической энергии конденсатора равно

$$\Delta W = \frac{CU'^2}{2} - \frac{CU^2}{2} = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} - \frac{CU^2}{2}.$$

Получаем

$$Q = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} - C\mathcal{E}U + \frac{CU^2}{2} = \frac{C(\mathcal{E} - U)^2}{2} = 40 \text{ мДж}.$$

Задача 10. *Конденсаторы емкостями $C_1 = 3$ мкФ и $C_2 = 1$ мкФ соединены последовательно и подключены к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E} = 200$ В. Сколько тепла выделится при пробое конденсатора меньшей емкости?*

Решение. Начальная электрическая энергия системы равна

$$W = C_{\text{сост}}\frac{\mathcal{E}^2}{2} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}\frac{\mathcal{E}^2}{2},$$

а конечная энергия –

$$W' = C_1\frac{\mathcal{E}^2}{2}.$$

Работа источника составляет

$$A_{\text{ист}} = \Delta q\mathcal{E} = (C_1\mathcal{E} - C_{\text{сост}}\mathcal{E})\mathcal{E}.$$

Подставляя в закон сохранения энергии (2), находим выделившееся количество теплоты:

$$Q = \frac{C_1\mathcal{E}^2}{2} - \frac{C_{\text{сост}}\mathcal{E}^2}{2} = 45 \text{ мДж}.$$

Задача 11. *Конденсатор емкостью $C = 3$ мкФ присоединен к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E} = 100$ В. Пластины* *конденсатора медленно раздвигают, втрое увеличивая расстояние между ними. Какую при этом совершают работу?*

Решение. Кроме механической работы, произведенной над обкладками при их раздвигании, в законе сохранения энергии необходимо учитывать работу источника тока:

$$\Delta W = A_{\text{мех}} + A_{\text{ист}},$$

где $\Delta W = \dfrac{C'\mathcal{E}^2}{2} - \dfrac{C\mathcal{E}^2}{2}$ – изменение электрической энергии конденсатора. При раздвигании пластин емкость конденсатора становится в три раза меньше: $C' = C/3$, значит, заряд конденсатора также уменьшается втрое: $q = C\mathcal{E}$, $q' = C'\mathcal{E} = (C/3)\mathcal{E}$. Источник при этом совершает отрицательную работу

$$A_{\text{ист}} = \mathcal{E}(q' - q) = C'\mathcal{E}^2 - C\mathcal{E}^2.$$

Для механической работы получаем ответ:

$$A_{\text{мех}} = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} - \frac{C'\mathcal{E}^2}{2} = \frac{C\mathcal{E}^2}{3} = 10 \text{ мДж}.$$

Замечание. В отличие от предыдущих трех задач, где при быстрой самопроизвольной перезарядке уменьшение энергии равно выделившемуся количеству теплоты, в этом и аналогичном примерах тепло при *медленном* раздвигании не выделяется, а изменение энергии равно работе (источника и внешних сил). Однако если изменение емкости проводить быстро, то за счет тока перезарядки в системе выделяется тепло, и закон сохранения энергии приобретает вид (сравните с задачей 6)

$$A_{\text{ист}} + A_{\text{мех}} = (W' + Q) - W. \qquad (3)$$

Если раздвигание пластин происходит так быстро, что заряд на конденсаторе не успевает измениться, то механическая работа совершается только на первом этапе, при неизменном заряде, а перезарядка до нужного напряжения происходит после остановки пластин. На первом этапе задача аналогична задаче 4:

$$A = \left(\frac{C}{C'} - 1\right)\frac{C\mathcal{E}^2}{2} = C\mathcal{E}^2 = 30 \text{ мДж},$$

а на втором – задаче 9:

$$Q = \frac{(C/3)(\mathcal{E} - 3\mathcal{E})^2}{2} = 20 \text{ Дж}.$$

Этот ответ можно сразу получить из формулы (3).

Задача 12. *Схема состоит из источника с ЭДС $\mathcal{E}$ = = 100 В, двух одинаковых конденсаторов емкостью C = = 10 мкФ каждый и ключа (рис.3). Вначале один из*

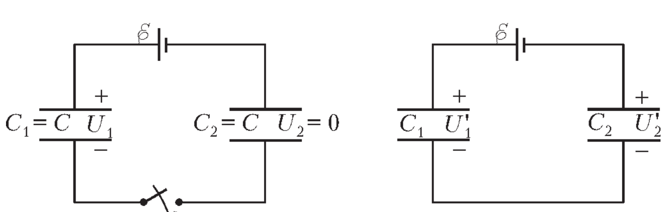


Рис. 3

конденсаторов был заряжен до напряжения U_1 = 200 В, а второй не заряжен. Сколько тепла выделится при замыкании ключа?

Решение. На первый взгляд, система выглядит как два последовательно соединенных конденсатора, подсоединенных к источнику. Однако это не так: поскольку один из конденсаторов до замыкания схемы был заряжен, то после замыкания заряды на конденсаторах *не равны* друг другу. Для вычисления конечных напряжений надо записать два уравнения – закон сохранения заряда:

$$C_1U_1' + C_2U_2' = C_1U_1$$

и условие, что разность потенциалов между полюсами источника равна его ЭДС:

$$U_1' - U_2' = \mathcal{E}$$

(правила знаков указаны на рисунке 3). Решая эти уравнения, находим

$$U_1' = \frac{C_1U_1 + C_2\mathcal{E}}{C_1 + C_2} = \frac{U_1 + \mathcal{E}}{2},$$

$$U_2' = \frac{C_1U_1 - C_1\mathcal{E}}{C_1 + C_2} = \frac{U_1 - \mathcal{E}}{2}.$$

Прошедший через источник заряд равен

$$\Delta q = -C_2U_2' = \frac{C_1C_2(\mathcal{E} - U_1)}{C_1 + C_2} = \frac{C}{2}(\mathcal{E} - U_1),$$

а работа источника равна

$$A_{\text{ист}} = \Delta q\mathcal{E}.$$

После подстановки в закон сохранения энергии

$$A_{\text{ист}} = \left(\frac{C_1U_1'^2}{2} + \frac{C_2U_2'^2}{2} + Q\right) - \frac{C_1U_1^2}{2}$$

получаем

$$Q = \frac{C(\mathcal{E} - U_1)^2}{4} = 25 \text{ мДж}.$$

Упражнения

1. Два одинаковых воздушных конденсатора соединены параллельно, заряжены и отсоединены от источника. У одного из них втрое уменьшают расстояние между пластинами, а у другого – втрое увеличивают. Во сколько раз уменьшится напряженность поля во втором конденсаторе?

2. Обкладки конденсатора емкостью C_1 = 30 мкФ, заряженного до напряжения U_1 = 200 В, соединяют с противоположно заряженными обкладками конденсатора емкостью C_2 = 10 мкФ, заряженного до напряжения U_2 = 400 В. Какое количество теплоты выделится при этом?

3. Конденсатор емкостью C_1 = 1,2 мкФ заряжен до напряжения U_1 = 135 В. Его соединяют параллельно с конденсатором емкостью C_2 = 0,8 мкФ, напряжение на котором U_2 = 110 В. Какой заряд пройдет по соединительным проводам?

4. Конденсатор емкостью C = 8 мкФ, заряженный до напряжения U = 100 В, подсоединили для подзарядки к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E}$ = 200 В, но перепутали обкладки: положительную подключили к отрицательному зажиму, а отрицательную – к положительному. Сколько тепла выделилось при перезарядке?

5. Система из двух параллельно соединенных конденсаторов с емкостями C_1 = 5 мкФ и C_2 = 15 мкФ и присоединенного к ним последовательно конденсатора емкостью C_3 = 30 мкФ подключена к источнику с ЭДС $\mathcal{E}$ = 100 В. Сколько тепла выделится при пробое конденсатора емкостью C_1?

6. Два одинаковых плоских воздушных конденсатора емкостью C = 12 мкФ каждый соединены последовательно и присоединены к источнику с ЭДС $\mathcal{E}$ = 200 В. Какую надо совершить работу, чтобы у одного из них вдвое увеличить расстояние между обкладками?

L Международная математическая олимпиада

Юбилейная L Международная математическая олимпиада (ММО) прошла с 10 по 22 июля 2009 года в городе Бремене (Германия) и ознаменовалась важным событием: впервые в истории международных предметных олимпиад число стран-участниц превысило сотню (в Бремен приехали команды 104 стран мира). Также рекордным стало общее число участников – 565.

Фото команды России на L ММО с победителем ММО 1986 и 1987 годов, лауреатом премии Европейского математического общества Станиславом Смирновым (в центре). Слева направо: В.Омельяненко, В.Брагин, М.Матдинов, К.Тыщук, К.Савенков, Г.Ненашев

Олимпиада проходила на базе студенческого городка университета Якобса. Помимо основного занятия – решения задач, юные математики всего мира участвовали в различных конкурсах, спортивных состязаниях и общались между собой. Культурная программа олимпиады включала знакомство с историей и традициями городов северной Германии, входивших в Ганзейский союз. В программе олимпиады один из дней был целиком посвящен празднованию 50-летия Международных математических олимпиад, на которое были приглашены представители разных стран, внесшие большой вклад в международное олимпиадное движение. На празднование юбилея были также специально приглашены шестеро ведущих математиков мира – лауреатов многих престижных премий, становившихся неоднократными победителями ММО: *Бела Болобаш* (профессор Кембриджского университета, участвовал в первых трех международных олимпиадах, завоевал бронзовую и две золотые медали), *Тимоти Гауэрс* (профессор Кембриджского университета, завоевал в 1981 году золотую медаль с абсолютным результатом), *Ласло Ловас* (директор математического института в Будапеште, в 1963–1966 годах завоевал 3 золотых и одну серебряную медали), *Станислав Смирнов* (профессор университета Женевы, в 1986–1987 годах, выступая за команду СССР, завоевал 2 золотые медали – обе с абсолютным результатом), *Теренс Тао* (профессор Калифорнийского университета, в 1986–1988 годах завоевал бронзовую, серебряную и золотую медали, причем первую медаль получил в возрасте 10 лет) и *Жан-Кристоф Йоккоз* (профессор Парижского университета, в 1973–1974 годах завоевал серебряную и золотую медали ММО). Участники олимпиады слушали выступления этих звезд современной математики, а кроме того, имели возможность побеседовать с ними лично.

Команду России в этом году составили одиннадцатиклассники *Владимир Брагин* (Снежинск, гимназия 127) и *Глеб Ненашев* (Санкт-Петербург, ФМЛ 239), а также десятиклассники *Марсель Матдинов* (СУНЦ МГУ), *Виктор Омельяненко* (Белгород, лицей 38), *Кирилл Савенков* и *Константин Тыщук* (Санкт-Петербург, оба – ФМЛ 239). Отметим перспективность нынешней команды – впервые сразу четыре члена команды имеют возможность представлять Россию на ММО следующего года.

Приводим результаты выступления команды России (каждая задача оценивалась из 7 баллов), а также таблицу с результатами стран, занявших первые 30 мест в неофициальном командном зачете.

Участник	Баллы по задачам						Сумма баллов	Медаль
	1	2	3	4	5	6		
Омельяненко Виктор	7	7	7	7	7	4	39	золотая
Матдинов Марсель	7	7	7	7	7	0	35	золотая
Тыщук Константин	7	7	7	7	7	0	35	золотая
Брагин Владимир	7	4	7	7	7	0	32	золотая
Ненашев Глеб	7	7	1	7	7	3	32	золотая
Савенков Кирилл	7	7	2	7	7	0	30	серебряная

№	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
1	Китай	221	6	0	0
2	Япония	212	5	0	1
3	Россия	203	5	1	0

4	Южная Корея	188	3	3	0
5	КНДР	183	3	2	1
6	США	182	2	4	0
7	Таиланд	181	1	5	0
8	Турция	177	2	4	0
9	Германия	171	1	4	1
10	Белоруссия	167	1	4	1
11	Италия	165	2	2	2
12	Тайвань	165	1	5	0
13	Румыния	163	2	2	2
14	Украина	162	3	1	2
15	Вьетнам	161	2	2	2
15	Иран	161	1	4	1
17	Бразилия	160	1	3	2
18	Канада	158	1	3	2
19	Болгария	157	1	3	2
19	Великобритания	157	1	3	2
19	Венгрия	157	1	2	3
22	Сербия	153	1	3	1
23	Австралия	151	2	1	2
24	Перу	144	0	4	2
25	Грузия	140	0	3	2
25	Польша	140	0	2	4
27	Казахстан	136	0	3	3
28	Индия	130	0	3	2
29	Гонконг	122	1	2	2
30	Сингапур	116	0	2	3

Олимпиада подтвердила высокий уровень российской математической школы: помимо успешного выступления нашей команды (второе место в командном зачете по медалям), две из шести задач олимпиады были предложены нашими задачными композиторами. Задача 2 предложена С. Берловым из Санкт-Петербурга, а задача 6 возникла в результате обобщения задачи Д. Храмцова из Новосибирска (эта задача оказалась, вероятно, самой трудной в истории ММО и получила высокую оценку жюри за красоту и содержательность результата).

Отметим также успешное выступление команды Белоруссии, во второй раз в истории вошедшей в десятку сильнейших, и команды Украины, завоевавшей 3 золотых медали.

Последним этапом подготовки команды России к ММО стали летние учебно-тренировочные сборы, которые проходили с 20 июня по 10 июля в пансионате «Лисицкий бор» Тверской области. Благодарим тренеров и наставников, чьи занятия способствовали успешному выступлению команды. (Помимо руководителей команды занятия проводили педагог ФМЛ 239 из Санкт-Петербурга *С.Берлов*, студент МГУ *А.Гаврилюк*, аспирант Математического института им. В.А.Стеклова РАН *А.Гарбер*, профессор Ярославского государственного университета *В.Дольников*, научный сотрудник Петербургского отделения Математического института им. В.А.Стеклова РАН и преподаватель СПбГУ *Д.Карпов*, доцент МФТИ *О.Подлипский*, старший научный сотрудник Новосибирского математического института им. С.Л.Соболева *Д.Фон-дер-Флаасс*, программист из Москвы *Г.Челноков*).

Руководители команды выражают искреннюю благодарность *Дмитрию Юрьевичу Дойхену*, который уже не первый год оказывает большую поддержку участия команды России в международных математических соревнованиях.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Даны натуральное число n и попарно различные натуральные числа $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$ из множества $\{1, \ldots, n\}$ такие, что для каждого $i = 1, \ldots, k-1$ число $a_i(a_{i+1}-1)$ делится на n. Докажите, что число $a_k(a_1-1)$ не делится на n.

Австралия

2. См. задачу М2158 «Задачника «Кванта».

Россия

3. Дана строго возрастающая последовательность натуральных чисел $s_1, s_2, s_3, \ldots$ такая, что каждая из двух последовательностей

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \text{ и } s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

является арифметической прогрессией. Докажите, что последовательность $s_1, s_2, s_3, \ldots$ также является арифметической прогрессией.

США

4. Треугольник ABC таков, что $AB = AC$. Биссектрисы углов CAB и ABC пересекают стороны BC и CA в точках D и E соответственно. Обозначим через K центр окружности, вписанной в треугольник ADC. Оказалось, что $\angle BEK = 45°$. Найдите все возможные значения угла CAB.

Бельгия

5. Найдите все функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (т.е. функции, определенные на множестве всех натуральных чисел и принимающие натуральные значения) такие, что для любых натуральных a и b существует треугольник, длины сторон которого равны трем числам

$$a, f(b) \text{ и } f(b + f(a) - 1).$$

Франция

6. См. задачу М2160 «Задачника «Кванта».

Россия – Германия

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Приведем решения задач, предложенные на олимпиаде членами нашей команды.

1 (К.Савенков). Предположим противное: $a_i(a_{i+1}-1) = a_ia_{i+1} - a_i$ делится на n для любого $i = 1, 2, \ldots, k$ (мы полагаем $a_{k+1} = a_1$). Тогда для $i = 1, 2, \ldots, k$ получаем $a_i \equiv a_ia_{i+1}$ (здесь и далее запись $x \equiv y$ означает, что x и y имеют одинаковые остатки при делении на n). Тогда $a_1 \equiv a_1a_2 \equiv a_1a_2a_3 \equiv \ldots \equiv a_1a_2\ldots a_k$, и аналогично $a_2 \equiv a_2a_3 \equiv a_2a_3a_4 \equiv \ldots \equiv a_2a_3\ldots a_ka_1$, т.е. $a_1 \equiv a_1a_2\ldots a_k \equiv a_2$. Так как a_1 и a_2 – натуральные числа, не превосходящие n, и $a_1 \equiv a_2$, то $a_1 = a_2$, что противоречит условию задачи.

Замечание. Аналогично доказывается, что $a_i = a_{i+1}$ для $i = 2, \ldots, k$. Отсюда следует, что утверждение задачи остается в силе, если среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ найдутся два различных.

3 (М.Матдинов). Будем писать $s(k)$ вместо s_k.

Положим $a(k) = s(k) - s(k-1)$, и пусть d – разность прогрессии $s(s(1)), s(s(2)), s(s(3)), \ldots$ Так как $s(s(i)) < s(s(i)+1) \leq s(s(i+1))$ (т.е. члены прогрессий $s(s(1)), s(s(2)), s(s(3)), \ldots$ и $s(s(1)+1), s(s(2)+1), s(s(3)+1), \ldots$ перемежаются), то разность второй прогрессии также равна d. Значит,

$$s(s(i)+1) - s(s(i)) = a(s(i)+1) \text{ не зависит от } i. \quad (1)$$

Ясно, что при $k \geq s(1)$ выполнено $s(k+1) - s(k) \leq d$, значит, последовательность $\{a(i)\}$ ограничена. Обозначим через a наибольшее из значений $a(i)$. Пусть $a = s(m+1) - s(m)$. Тогда

$$d = s(s(m+1)) - s(s(m)) = a(s(m)+1) + a(s(m)+2) + \ldots + a(s(m+1)). \quad (2)$$

Поэтому среди a чисел $a(s(m)+1), a(s(m)+2), \ldots, a(s(m+1))$ найдется число, не превосходящее $\frac{d}{a}$. Заметим, что если одно из чисел $a(i)$ равно $b < \frac{d}{a}$ (скажем, $s(t+1) - s(t) = b$), то, аналогично, в последовательности $\{a(i)\}$ найдется b подряд идущих чисел (это числа $a(s(t)+1), a(s(t)+2), \ldots, a(s(t+1))$), дающих в сумме d. Но их среднее арифметическое будет равно $\frac{d}{b} > a$, что невозможно. Таким образом, в сумме (2) каждое слагаемое не меньше $\frac{d}{a}$. Следовательно, каждое слагаемое равно $\frac{d}{a}$, в частности,

$$a(s(m)+1) = \frac{d}{a}. \quad (3)$$

Так как $\frac{d}{a} = s(s(m)+1) - s(s(m))$, то в выражении $a(s(s(m))+1) + a(s(s(m))+2) + \ldots + a(s(s(m)+1))$ участвуют $\frac{d}{a}$ слагаемых, дающих в сумме $s(s(s(m)+1)) - s(s(s(m))) = d$. Значит, каждое из этих слагаемых равно a, в частности,

$$a(s(s(m))+1) = a. \quad (4)$$

Теперь из (1), (3) и (4) получаем, что $a = \frac{d}{a}$, откуда $d = a^2$. Если среди чисел $a(i)$ найдется число c, меньшее a, то (аналогично предыдущему) в последовательности $\{a(i)\}$ встретится c подряд идущих чисел, в сумме дающих $d = a^2$, значит, одно из них будет больше a, что невозможно. Итак, для любого номера i имеем $a(i) = a$, поэтому $\{s(i)\}$ – арифметическая прогрессия.

4 (К.Тыщук). *Ответ*: 60°, 90°.

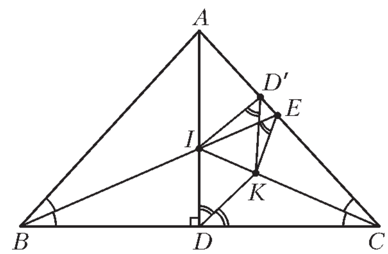
Пусть I – точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Тогда K лежит на отрезке CI, и DK – биссектриса угла ADC.

Отразив точку D симметрично относительно биссектрисы CI, получим точку D', лежащую на луче CA. Из симметрии $\angle ID'K = \angle KD'C = \angle IDK = \angle KDC = 45°$, $\angle ID'C = 90°$.

Рассмотрим следующие два случая.

1. Пусть точка D' совпала с E. Тогда биссектриса BE является также и высотой, поэтому треугольник ABC – равносторонний, и $\angle CAB = 60°$. Наоборот, в правильном треугольнике ABC точки D и E симметричны относительно CI, поэтому $\angle BEK = \angle IDK = 45°$.

2. Пусть точка D' не совпала с E (см. рисунок). Тогда из равенства $\angle IEK = \angle ID'K$ следует, что точки I, K, E, D' лежат на одной окружности. Поэтому $\angle EIK = \angle KD'C = 45°$. Отсюда $\angle ABC = 2\angle IBC = \angle IBC + \angle ICB = \angle EIK = 45°$, и, следовательно, $\angle CAB = 90°$. Рассуждая в обратном порядке, получаем, что в равнобедренном прямоугольном треугольнике $\angle BEK = \angle ID'K = \angle IDK = 45°$.



5 (Г.Ненашев). *Ответ*: $f(a) = a$.

Положив $d = f(1) - 1 \geq 0$, имеем $1 + f(b) > f(b+d)$ и $f(b+d) + 1 > f(b)$, и поскольку f принимает натуральные значения, то $f(b) \geq f(b+d)$ и $f(b+d) \geq f(b)$, т.е. $f(b) = f(b+d)$. Аналогично получаем $f(b) = f(b+d) = f(b+2d) = \ldots = f(b+md)$ для всех натуральных m и b. Далее, $a + md < f(b) + f(b + f(a+md) - 1) = f(b) + f(b + f(a) - 1)$. Если предположить, что $d > 0$, то для данных a и b подберем m такое, что левая часть последнего неравенства станет больше правой, – противоречие. Таким образом, $d = 0$, т.е. $f(1) = 1$.

Поскольку числа a, $f(1) = 1$ и $f(1 + f(a) - 1) = f(f(a))$ являются сторонами треугольника, то $a + 1 > f(f(a))$ и $f(f(a)) + 1 > a$, откуда вытекает $f(f(a)) = a$ для всех натуральных a.

Пусть $f(2) = k$. Сразу отметим, что $k \neq 1$, иначе $f(2) = 1$ и $2 = f(f(2)) = f(1) = 1$ – противоречие.

Докажем индукцией по a, что $f(ak - (a-1)) = a + 1$. При $a = 1$ утверждение верно, так как $2 = f(f(2)) = f(k)$. Пусть утверждение верно для некоторого a, докажем его для $a + 1$. Поскольку числа $f(k) = 2$, $f(ak - (a-1)) = a + 1$ и $f(ak - (a-1) + f(f(k)) - 1) = f((a+1)k - a)$ являются сторонами треугольника, имеем $2 + a + 1 > f((a+1)k - a)$, откуда $f((a+1)k - a) \leq a + 2$. Предположим, что $f((a+1)k - a) = b < a + 2$. По предположению индукции $f(tk - (t-1)) = t + 1$ для $t = 0, 1, \ldots, a$. В частности, для $y = b - 1$ имеем $f(yk - (y-1)) = b$. Тогда $yk - (y-1) = f(f(yk - (y-1))) = f(b)$ и $(a+1)k - a = f(f((a+1)k - a)) = f(b)$, значит, $yk - (y-1) = (a+1)k - a$, или $(y - a - 1)(k-1) = 0$. Но $y < b \leq a + 1$ и $k \neq 1$ – противоречие. Остается единственная возможность $f((a+1)k - a) = a + 2$, и переход индукции доказан.

Из равенства $f(ak - (a-1)) = a + 1$ вытекает $f(a+1) = ak - (a-1)$. Замена $a + 1$ на a дает $f(a) = (a-1)k - (a-2)$ при $a \geq 2$. Если $k > 2$, то при $a \geq 2$ выполнено $f(a) = (a-1)k - (a-2) = a + (a-1)(k-2) > a$. Но тогда $2 < f(2) < f(f(2))$ – противоречие. Окончательно, $k = 2$, и $f(a) = a$. Проверка показывает, что найденная функция удовлетворяет условию.

Публикацию подготовили руководители команды России на L ММО Н.Агаханов, И.Богданов, П.Кожевников, Д.Терёшин, М.Пратусевич

XL Международная олимпиада школьников по физике

В этом году Международная физическая олимпиада (МФО) школьников проходила в Мексике, в городе Мерида. Из-за тревожной эпидемиологической обстановки в этой стране часть команд отказалась от участия в олимпиаде. В Мериду прибыли только 316 школьников из 69 стран (для сравнения – в прошлом году во Вьетнаме было 376 участников из 76 государств).

В сборную команду России вошли:

Трегубов Дмитрий – Киров, ФМЛ, учителя-наставники Канин Павел Евгеньевич, Гырдымов Михаил Владимирович,

Землянов Владислав – Урай (Ханты-Мансийский автономный округ), гимназия, учитель-наставник Козловская Зоя Георгиевна,

Кудряшова Нина – Бийск, Бийский лицей Алтайского края, учитель-наставник Аполонский Александр Николаевич,

Дорошенко Андрей – Омск, лицей 92, учитель-наставник Афанасьева Юлика Александровна,

Старков Григорий – Ноябрьск (Ямало-Ненецкий автономный округ), школа 7, учитель-наставник Ткачук Игорь Викторович.

Команду России возглавили профессор Московского физико-технического института (МФТИ) Станислав Миронович Козел и доцент МФТИ Валерий Павлович Слободянин. В составе российской делегации в качестве наблюдателя работал доцент МФТИ Михаил Николаевич Осин.

Как и в прошлые годы, восемь кандидатов в команду России были приглашены на последние трехнедельные летние сборы, на которых отрабатывались навыки экспериментальной работы на сложном современном оборудовании и дополнительно изучались элементы специальной теории относительности, волновой оптики, ядерной физики и ряд других тем, входящих в программу МФО. Во время сборов с командой работали преподаватели кафедры общей физики МФТИ, СУНЦ МГУ, научные сотрудники институтов Российской академии наук, а также студенты Физтеха – победители Международных физических олимпиад прошлых лет.

Обсерватория майя (Мексика)

Команда России на XL МФО. Слева направо: Г.Старков, А.Дорошенко, Н.Кудряшова, С.М.Козел, Маша – гид нашей команды, В.Землянов, Д.Трегубов

На олимпиаде участникам были предложены три теоретические задачи и два экспериментальных задания. Каждая задача и каждое задание оценивались из 10 баллов. Таким образом, максимальное количество баллов, которое мог набрать каждый из участников олимпиады, равнялось 50.

Оба тура олимпиады – теоретический и экспериментальный – оказались крайне трудоемкими. Ниже приведен список из 11 лидирующих стран (согласно их рейтингу):

№	Страна	Количество медалей			Сумма баллов
		золото	серебро	бронза	
1	Китай	5			216
2	Корея	4	1		186
3	Индия	4	1		180
4	Тайвань	3	2		179
5	США	4	1		176
6	Россия	3	2		165
7	Румыния	3	2		161
8	Сингапур	2	3		154
9	Таиланд	1	4		152
10	Индонезия	1	3	1	148
11	Япония	2	1	2	144

Как видно из таблицы, лидерство на олимпиаде захватили страны из Юго-Восточной Азии. Команды этих стран устойчиво добиваются высоких результатов в Международных олимпиадах и по другим предметам.

Члены сборной России показали следующие результаты:

Участник	Теория	Эксперимент	Сумма баллов	Медаль
Старков Григорий	21,45	14,00	35,45	золото
Землянов Владислав	20,60	13,65	34,75	золото

Трегубов Дмитрий	18,80	15,80	34,60	золото
Дорошенко Андрей	18,75	11,90	30,65	серебро
Кудряшова Нина	15,20	14,40	29,60	серебро

Ниже приводится несколько сокращенная версия условий задач теоретического тура олимпиады.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

Задача 1. Эволюция системы Земля–Луна

Ученые научились определять расстояние от Луны до Земли с большой точностью с помощью лазерного луча, отражающегося от специальных зеркал, установленных на поверхности Луны. В ходе таких измерений ученые непосредственно определили, что Луна медленно удаляется от Земли. Это происходит потому, что из-за образования приливных волн момент импульса Земли передается Луне.

1. Сохранение момента импульса

Пусть L_1 – полный момент импульса системы Земля–Луна в настоящее время. Сделаем следующие предположения: 1) L_1 определяется только вращением Земли вокруг собственной оси и вращением Луны вокруг Земли; 2) орбита Луны круговая, Луна считается материальной точкой; 3) ось вращения Земли и ось вращения Луны совпадают; 4) для упрощения расчетов будем считать, что эти оси проходят через центр Земли; во всех пунктах данной задачи моменты инерции, моменты сил и моменты импульса рассчитываются относительно этой общей оси; 5) влиянием Солнца на движение рассматриваемой системы можно пренебречь.

1.1. Запишите для настоящего времени выражение для полного момента импульса L_1. Выразите его через момент инерции Земли $I_З$, угловую скорость вращения Земли $\omega_{З_1}$, момент инерции Луны относительно земной оси $I_{Л_1}$ и угловую скорость орбитального движения Луны, $\omega_{Л_1}$. (0,2 балла)

Процесс передачи момента импульса от Земли к Луне прекратится, когда земные сутки и период обращения Луны будут иметь одну и ту же продолжительность. К этому времени приливные подъемы воды, которые Луна вызывает на Земле, будут ориентированы вдоль прямой, соединяющей центры Земли и Луны, и момент силы исчезнет.

1.2. Запишите выражение для конечного значения полного момента импульса системы Земля–Луна L_2. Используйте те же предположения, что и в предыдущем пункте. Выразите L_2 через момент инерции Земли $I_З$, конечные угловые скорости вращения Земли $\omega_{З_2}$ и обращения Луны $\omega_{Л_2}$ и конечный момент инерции Луны $I_{Л_2}$. (0,2 б.)

1.3. Пренебрегая вкладом вращения Земли в конечную величину полного момента импульса, напишите уравнение, выражающее закон сохранения момента импульса. (0,3 б.)

2. Конечные расстояние и угловая скорость движения системы Земля–Луна

Будем считать, что орбита движения Луны вокруг Земли все время остается круговой, и рассмотрим конечное состояние системы.

2.1. Запишите уравнение, определяющее закон движения Луны по круговой орбите вокруг Земли. Выразите данное уравнение через расстояние D_2 между центрами Земли и Луны в конечном состоянии, массу Земли $M_З$, угловую скорость ω_2 и гравитационную постоянную G. (0,2 б.)

2.2. Запишите выражение для расстояния между Землей и Луной D_2 как функцию полного момента импульса системы L_1, масс Земли и Луны $M_З$ и $M_Л$, соответственно, и гравитационной постоянной G. (0,5 б.)

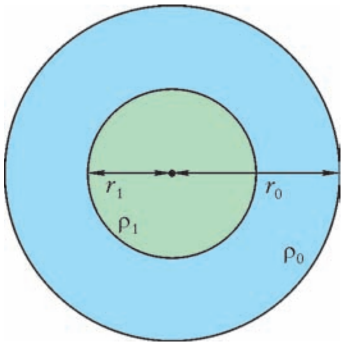


Рис. 1

2.3. Запишите выражение для угловой скорости ω_2 системы Земля–Луна через известные параметры L_1, $M_З$, $M_Л$ и G. (0,5 б.)

2.4. Запишите выражение для момента инерции Земли $I_З$, предполагая, что она является шаром с плотностью ρ_1 от центра до расстояния r_1 и шаровым слоем с плотностью ρ_0 от расстояния r_1 до расстояния r_0 до поверхности (рис.1). (0,5 б.)

2.5. Рассчитайте момент инерции Земли $I_З$, используя следующие численные значения: $\rho_1 = 1{,}3 \cdot 10^4$ кг·м$^{-3}$, $r_1 = 3{,}5 \cdot 10^6$ м, $\rho_0 = 4{,}0 \cdot 10^3$ кг·м$^{-3}$ и $r_0 = 6{,}4 \cdot 10^6$ м. (0,2 б.)

2.6. Оцените численное значение полного момента импульса рассматриваемой системы L_1. (0,2 б.)

Массы Земли и Луны равны $M_З = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ кг и $M_Л = 7{,}3 \cdot 10^{22}$ кг соответственно. В настоящее время расстояние между Землей и Луной равно $D_1 = 3{,}8 \cdot 10^8$ м. Угловая скорость вращения Земли вокруг собственной оси составляет $\omega_{З_1} = 7{,}3 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$. Угловая скорость обращения Луны вокруг Земли $\omega_{Л_1} = 2{,}7 \cdot 10^{-6}$ с$^{-1}$, гравитационная постоянная $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ м^3·кг$^{-1}$·с$^{-2}$.

2.7. Найдите конечное расстояние D_2 в метрах и в единицах расстояния от Земли до Луны в настоящее время D_1. (0,3 б.)

2.8. Найдите конечную угловую скорость ω_2 в с$^{-1}$ и конечную продолжительность суток в единицах нынешних суток. (0,3 б.)

2.9. Найдите отношение конечного углового момента Земли к конечному угловому моменту Луны. (0,2 б.)

3. На сколько Луна удаляется за год?

Теперь найдите, на сколько Луна удаляется от Земли каждый год. Для этого определите момент силы, действующей на Луну в настоящее время. Предположите, что приливные волны можно заменить двумя материальными точками массами m, расположенными на поверхности Земли (рис.2).

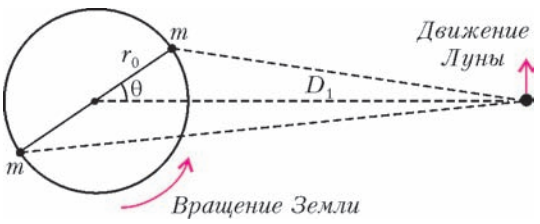


Рис. 2

Пусть θ – угол между линией, соединяющей места наибольшего подъема, и линией, соединяющей центры Земли и Луны.

3.1. Найдите модуль силы F_1, действующей на Луну со стороны ближайшей к ней точечной массы. (0,4 б.)

3.2. Найдите модуль силы F_2, действующей на Луну со стороны отдаленной от нее точечной массы. (0,4 б.)

3.3. Найдите модуль τ_1 момента силы, действующего на Луну со стороны ближайшей к ней точечной массы. (0,4 б.)

3.4. Найдите модуль τ_2 момента силы, действующего на Луну со стороны отдаленной от нее точечной массы. (0,4 б.)

3.5. Найдите полный момент силы τ от двух масс. Так как $r_0 \ll D_1$, выпишите выражение до первого значимого порядка по r_0/D_1. Считайте, что $(1+x)^a \approx 1+ax$ при $x \ll 1$. (1 б.)

3.6. Вычислите численное значение полного момента силы τ, принимая во внимание, что $\theta = 3^\circ$ и $m = 3{,}6 \cdot 10^{16}$ кг (заметьте, что эта масса составляет примерно 10^{-8} от массы Земли). (0,5 б.)

3.7. Найдите численное значение увеличения расстояния между Землей и Луной за год в настоящее время. (1 б.)

3.8. Найдите численное значение уменьшения угловой скорости вращения Земли за год и увеличение продолжительности земных суток за год. (1 б.)

4. Куда уходит энергия?

В противоположность моменту импульса, который сохраняется, полная энергия системы не сохраняется.

4.1. Запишите выражение для полной (кинетической и гравитационной) энергии E системы Земля–Луна в настоящее время. Выразите E через $I_З$, $\omega_{З_1}$, $M_Л$, $M_З$, D_1 и G. (0,4 б.)

4.2. Запишите выражение для изменения этой энергии ΔE как функцию изменения параметров D_1 и $\omega_{З_1}$. Оцените численное значение величины ΔE за год, используя величины изменения D_1 и $\omega_{З_1}$, найденные ранее. (0,4 б.)

Проверьте, что эти потери энергии связаны с переходом механической энергии в тепловую в процессе подъема и опускания воды в каждой приливной волне. Считайте, что изменение потенциальной энергии при подъеме одного горба приливной волны эквивалентно подъему слоя воды толщиной $h = 0{,}5$ м, покрывающего всю поверхность Земли (для упрощения можно считать, что вся Земля покрыта водой) в среднем на высоту 0,5 м. Это случается дважды в день. Далее считайте, что 10% этой гравитационной энергии переходит в тепло благодаря наличию вязкости при опускании воды. Считайте плотность воды равной $\rho_в = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг $\cdot$ м$^{-3}$, ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 9{,}8$ м $\cdot$ с$^{-2}$.

4.3. Чему равна масса этого поверхностного слоя воды? (0,2 б.)

4.4. Вычислите, на сколько уменьшается энергия за год. Сравните полученное значение с потерями энергии, рассчитанными ранее. (0,3 б.)

Задача 2. Лазерное охлаждение атомов и «оптическая патока»

Термины «лазерное охлаждение» и «оптическая патока» относятся к охлаждению (замедлению) пучка нейтральных атомов с помощью распространяющихся в противоположных направлениях лазерных пучков одной и той же частоты. Область захвата, называемая «оптической патокой», лежит на пересечении трех взаимно перпендикулярных пар противоположно направленных лазерных пучков. Оптическая диссипативная сила (трение) напоминает силу вязкости, действующую на тело, которое движется сквозь патоку.

Часть I. Основы лазерного охлаждения

Для простоты рассмотрим одномерную задачу, т.е. не будем принимать во внимание оси y и z. Пусть атом массой m движется в направлении $+x$ со скоростью v и обладает двумя внутренними энергетическими состояниями с разницей энергий $\hbar\omega_0$, где $\hbar = h/(2\pi)$ (рис.3). Первоначально он находится в нижнем энергетическом состоянии, и его энергию можно принять равной нулю. Свет от лазера с частотой $\omega_л$ распространяется в направлении $-x$ и взаимодействует с атомом. Лазерный пучок состоит из большого числа фотонов, каждый из которых обладает энергией $\hbar\omega_л$ и импульсом $-\hbar q$ (здесь $q = \omega/c$, где c – скорость света). Атом может поглотить фотон и после этого излучить другой фотон за счет спонтанного излучения. Вероятность спонтанного излучения в направлениях $+x$ и $-x$ одна и та же. Атом движется с нерелятивистской скоростью $v \ll c$. Также имейте в виду, что $\hbar q/(mv) \ll 1$, т.е. импульс атома значительно больше импульса одиночного фотона. При написании ответов приводите лишь результаты, линейные по отношению к указанным величинам (т.е. сохраняйте в ответах лишь величины первого порядка малости).

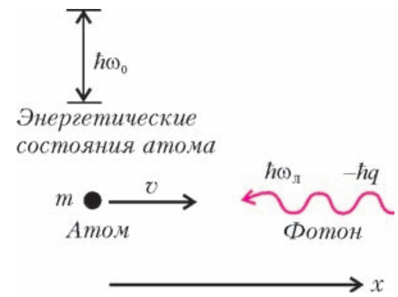


Рис. 3

Пусть частота лазера $\omega_л$ такова, что она находится в резонансе с частотой энергетического перехода движущегося атома. Ответьте на следующие вопросы.

1.Поглощение

1.1. Запишите условие резонансного поглощения фотона. (0,2 балла)

1.2. Запишите выражение для импульса атома $p_а$ после поглощения фотона в лабораторной системе отсчета. (0,2 б.)

1.3. Запишите выражение для полной энергии атома $\varepsilon_а$ после поглощения фотона в лабораторной системе отсчета. (0,2 б.)

2. Спонтанное излучение фотона в направлении $-x$

Через некоторое время после поглощения фотона атом может излучить другой фотон в направлении $-x$.

2.1. Запишите выражение для энергии фотона $\varepsilon_ф$, излученного в направлении $-x$ в лабораторной системе отсчета. (0,2 б.)

2.2. Запишите выражение для импульса фотона $p_ф$, излученного в направлении $-x$ в лабораторной системе отсчета. (0,2 б.)

2.3. Запишите выражение для импульса атома после процесса излучения фотона в направлении $-x$ в лабораторной системе отсчета. (0,2 б.)

2.4. Запишите выражение для полной энергии атома после процесса излучения фотона в направлении $-x$ в лабораторной системе отсчета. (0,2 б.)

3. Спонтанное излучение фотона в направлении $+x$

Через некоторое время после поглощения фотона атом может излучить другой фотон в направлении $+x$.

3.1. Запишите выражение для энергии фотона, излученного в направлении $+x$ в лабораторной системе отсчета. (0,2 б.)

3.2. Запишите выражение для импульса фотона, излученного в направлении $+x$ в лабораторной системе отсчета. (0,2 б.)

3.3. Запишите выражение для импульса атома после процесса излучения фотона в направлении $+x$ в лабораторной системе отсчета. (0,2 б.)

3.4. Запишите выражение для полной энергии атома после процесса излучения фотона в направлении $+x$ в лабораторной системе отсчета. (0,2 б.)

4. Усредненное излучение после поглощения

Имейте в виду, что спонтанное излучение фотона происходит с одинаковой вероятностью в направлениях $-x$ или $+x$.

4.1. Запишите выражение для средней энергии излученного фотона. (0,2 б.)

4.2. Запишите выражение для среднего значения импульса излученного фотона. (0,2 б.)

4.3. Запишите выражение для средней энергии атома после процесса излучения фотона. (0,2 б.)

4.4. Запишите выражение для среднего значения импульса атома после процесса излучения фотона. (0,2 б.)

5. Передача энергии и импульса

Если принять, что процесс поглощения и излучения одного фотона происходит так, как он описан выше, то в среднем существует передача энергии и импульса от лазерного излучения к атому.

5.1. Запишите выражение для среднего изменения энергии атома $\Delta\varepsilon_а$ в результате полного процесса поглощения и излучения фотона. (0,2 б.)

5.2. Запишите выражение для среднего изменения импульса атома $\Delta p_а$ в результате полного процесса поглощения и излучения фотона. (0,2 б.)

6. Передача энергии и импульса лазерным пучком, распространяющимся в направлении $+x$

Пусть лазерный луч с частотой $\omega'_л$ распространяется в направлении $+x$, в то время как атом движется в направлении $+x$ со скоростью v. Предполагая наличие резонансных условий между внутренним переходом атома и лазерным излучением, ответьте на следующие вопросы.

6.1. Запишите выражение для среднего изменения энергии атома в результате полного процесса поглощения и излучения фотона. (0,3 б.)

6.2. Запишите выражение для среднего изменения импульса атома в результате полного процесса поглощения и излучения фотона. (0,3 б.)

Часть II. Диссипация энергии и явление «оптической патоки»

Квантовые процессы в природе имеют внутренне присущую им неопределенность. Поэтому, из-за того что время между поглощением и излучением фотона *конечно*, резонансное условие не должно выполняться *точно*, как мы предполагали до сих пор. Иными словами, частоты лазерных пучков $\omega_л$ и $\omega'_л$ могут быть произвольными, но поглощение и излучение все равно будут происходить, правда с различными (квантовыми) вероятностями, и наибольшая вероятность будет соответствовать точному резонансу. Среднее время между поглощением и излучением одного фотона называется временем жизни возбужденного уровня и обозначается Γ^{-1}. Рассмотрим коллектив из N атомов, *покоящихся* в лабораторной системе отсчета, и луч лазера с частотой $\omega_л$, который с ними взаимодействует. Атомы поглощают и излучают непрерывно, так что в среднем имеется $N_в$ атомов в возбужденном состоянии (и $N - N_в$ – в основном). Квантово-механическое рассмотрение приводит к следующему результату:

$$N_в = N\frac{\Omega_R^2}{(\omega_0 - \omega_л)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2},$$

где ω_0 – резонансная частота атомного перехода, Ω_R – так называемая частота Раби, Ω_R^2 пропорциональна *интенсивности* лазерного пучка. Как уже было сказано, величина $N_в$ отлична от нуля, даже если резонансная частота ω_0 отличается от частоты лазерного пучка $\omega_л$. Другими словами, количество процессов поглощения-излучения в единицу времени равно $N_в\Gamma$.

Обсудим физическую ситуацию, где два распространяющихся в противоположных направлениях лазерных пучка имеют *одинаковую*, но *произвольную* частоту $\omega_л$ и взаимодействуют с газом из N атомов, которые движутся в направлении $+x$ со скоростью v (рис.4).

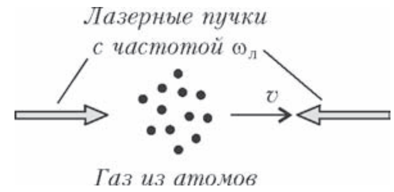


Рис. 4

7. Сила, действующая на атомный пучок со стороны лазеров

7.1. Используя предыдущую информацию, найдите силу, с которой лазерные пучки действуют на атомы. Считайте, что $mv \gg \hbar q$. (1,5 б.)

8. Предел малой скорости

Предполагая, что скорость атомов достаточно мала, можно получить выражение для силы в первом порядке малости по v.

8.1. Найдите выражение для силы, полученной в предыдущем пункте, для этого приближения. (1,5 б.)

Используя этот результат, вы можете получить условия для ускорения или замедления атомов излучением, или для отсутствия эффекта.

8.2. Запишите условие для получения положительной силы (ускорение атомов). (0,25 б.)

8.3. Запишите условие получения нулевой силы. (0,25 б.)

8.4. Запишите условие получения отрицательной силы (замедление атомов). (0,25 б.)

8.5. Теперь предположим, что атомы движутся со скоростью $-v$ (в направлении $-x$). Запишите условие получения отрицательной силы (замедления атомов). (0,25 б.)

9. «Оптическая патока»

В случае отрицательной силы возникает диссипация (трение). Предположим, что первоначально, при $t = 0$, газ из атомов имеет скорость v_0.

9.1. В пределе малых скоростей найдите скорость атомов через время τ после включения лазера. (1,5 б.)

9.2. Теперь предположите, что газ из атомов находится в тепловом равновесии при температуре T_0. Найдите температуру T после того, как лазерные пучки были выключены через время τ. (0,5 б.)

Примечание. Это приближение нельзя использовать для достижения произвольно низкой температуры.

Задача 3. Почему звезды такие большие

Большинство обычных звезд светит потому, что в их центральной части происходят реакции термоядерного синтеза, в результате которых водород превращается в гелий. В этой задаче вам предстоит показать, что звезды должны быть достаточно большими, чтобы в них могли протекать реакции синтеза на основе водорода, и получить минимально необходимые для этого массу и радиус звезды.

Предположим, что звезда состоит из ионизированного водорода (количество электронов равно количеству протонов), который ведет себя как идеальный газ. С классической точки зрения, для осуществления реакции синтеза два протона должны сблизиться на расстояние 10^{-15} м, чтобы сильное ядерное взаимодействие, обеспечивающее их притяжение, стало доминировать.

1. Оценка температуры в центре звезд на основе классической физики

Для того чтобы ядра сблизить, необходимо преодолеть кулоновское отталкивание. Примем, что два протона (точечные заряды) движутся навстречу друг другу со среднеквадратичной скоростью теплового движения v.

1.1. Какой должна быть температура газа T, чтобы расстояние максимального сближения d равнялась 10^{-15} м? (1,5 б.)

2. Почему предыдущая оценка температуры неверна

Выполним независимые оценки температуры в центре звезды. Звезды находятся в равновесии, так как сила тяжести уравновешивается направленной наружу силой давления. Для слоя газа на расстоянии r от центра звезды условие равновесия имеет вид

$$\frac{\Delta p}{\Delta r} = -\frac{GM_r\rho_r}{r^2},$$

где p – давление газа, G – постоянная всемирного тяготения, M_r – масса звездного вещества внутри сферы радиусом r, ρ_r – плотность газа в слое на расстоянии r от центра звезды (рис.5). Разность давлений на поверхности звезды и в ее центре $\Delta p = p_0 - p_{ц}$ можно оценить как $\Delta p \approx -p_{ц}$, поскольку $p_{ц} \gg p_0$. В том же приближении $\Delta r \approx R$, где R – полный радиус звезды, и $M_r \approx M_R = M$, где M – полная масса звезды. Плотность звездного вещества на расстоянии r от центра звезды можно оценить ее значением в центре: $\rho_r \approx \rho_{ц}$. Полагая, что давление можно определить как давление идеального газа, сделайте следующее.

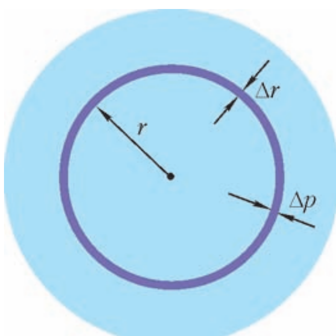


Рис. 5

2.1. Запишите выражение для температуры $T_{ц}$ в центре звезды через радиус звезды, ее массу и физические константы. (0,5 б.)

Теперь, проверим справедливость этой оценки.

2.2. Используя выражение из предыдущего пункта, запишите отношение M/R для звезды только через $T_{ц}$ и физические константы. (0,5 б.)

2.3. Используйте значение $T_{ц}$ из пункта 1.1 и найдите численное значение M/R для звезды. (0,5 б.)

2.4. Вычислите отношение $M_{С}/R_{С}$ для Солнца и убедитесь, что оно значительно меньше величины, полученной в пункте 2.3. (0,5 б.)

3. Оценка температуры в центре звезды на основе квантовой физики

Значительное несоответствие, обнаруженное в пункте 2.4, указывает, что классическая оценка для $T_{ц}$ неправильна. Это несоответствие удается устранить, если учесть квантовые эффекты. Они состоят в том, что протоны ведут себя как волны и отдельный протон локализуется на расстоянии порядка длины волны де Бройля для протонов λ_p. Поэтому, если расстояние максимального сближения протонов d оказывается близким к λ_p, протоны в квантовом смысле перекрываются и могут сливаться.

3.1. Полагая, что условие $d = \lambda_p/\sqrt{2}$ обеспечивает возможность синтеза, для протонов со скоростью v запишите выражение для $T_{ц}$, используя только физические постоянные. (1 б.)

3.2. Получите численное значение температуры $T_{ц}$, найденной в предыдущем пункте. (0,5 б.)

3.3. Используя значение $T_{ц}$, полученное в пункте 3.2, и формулу, полученную в пункте 2.2, определите численное значение отношения M/R для звезды. Убедитесь, что это значение достаточно близко к определенному отношению для Солнца. (0,5 б.)

Звезды главной последовательности удовлетворяют этому отношению в широком интервале масс. Следовательно, квантовая оценка температуры в центре Солнца правильна.

4. Отношение массы к радиусу для звезд

4.1. Покажите, что для любой звезды, в которой происходит синтез на основе водорода, отношение ее массы M к радиусу R есть постоянная величина, определяемая лишь физическими константами. Запишите выражение для M/R для звезд, в которых происходит синтез на основе водорода. (0,5 б.)

5. Масса и радиус самых маленьких звезд

Результат, полученный в пункте 4.1, предполагает, что если для звезд выполнено найденное соотношение, то они могут иметь любую массу. Это неверно. Газ внутри обычных звезд, в которых происходит синтез на основе водорода, ведет себя как идеальный. Это означает, что характерное расстояние *между электронами* d_e в среднем должно быть больше, чем длина волны де Бройля для электронов λ_e. Если электроны находятся ближе друг к другу, они оказываются в так называемом вырожденном состоянии, что приводит к иному поведению звезд. Заметьте, что электроны и протоны внутри звезды рассматриваются по-разному. Для протонов волны де Бройля должны перекрываться, чтобы начался синтез, а для электронов перекрытия не должно быть, чтобы их газ можно было считать идеальным.

Плотность звездного вещества возрастает с уменьшением расстояния до центра звезды. Тем не менее, для оценки по порядку величины можно считать, что его плотность постоянна. Можно также воспользоваться тем, что $m_p \gg m_e$.

5.1. Запишите уравнение для средней концентрации электронов в звезде n_e. (0,5 б.)

5.2. Запишите уравнение для характерного расстояния между электронами d_e внутри звезды. (0,5 б.)

5.3. Используя условие $d_e \ge \lambda_e/\sqrt{2}$, запишите выражение для наименьшего возможного радиуса обычной звезды. Считайте, что температура звезды равна температуре в ее центре. (1,5 б.)

5.4. Вычислите радиус наименьшей обычной звезды как выраженное в метрах, так и нормированное на радиус Солнца. (0,5 б.)

5.5. Вычислите массу наименьшей обычной звезды как в килограммах, так и в массах Солнца. (0,5 б.)

6. Синтез на основе ядер гелия в старых звездах

Когда звезды стареют, они сжигают почти весь водород, превращая его в гелий (He). Чтобы свечение продолжалось, в них должен осуществляться синтез более тяжелых элементов из гелия. В ядре гелия имеются два протона и два нейтрона, поэтому его заряд равен двум зарядам протона, а масса примерно в 4 раза больше, чем у протона.

6.1. Мы уже видели, что условие слияния двух протонов имеет вид $d = \lambda_p/\sqrt{2}$. Записав аналогичное условие для ядер гелия, найдите среднеквадратичную скорость ядер гелия $v(\text{He})$ и температуру $T(\text{He})$, необходимые для синтеза на основе гелия. (0,5 б.)

Полезные постоянные

Постоянная всемирного тяготения $G = 6{,}7\cdot10^{-11}$ м$^3\cdot$кг$^{-1}\cdot$с^2, постоянная Больцмана $k = 1{,}4\cdot10^{-23}$ Дж$\cdot$К$^{-1}$, постоянная Планка $h = 6{,}6\cdot10^{-34}$ кг$\cdot$м$^2\cdot$с, масса протона $m_p = 1{,}7\cdot10^{-27}$ кг, масса электрона $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, элементарный электрический заряд $q = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}9\cdot10^{-12}$ Кл$^2\cdot$Н$^{-1}\cdot$м$^{-2}$, радиус Солнца $R_{С} = 7{,}0\cdot10^8$ м, масса Солнца $M_{С} = 2{,}0\cdot10^{30}$ кг.

Публикацию подготовили С.Козел, В.Слободянин

Очередной набор в ОЛ ВЗМШ

Открытый лицей «Всероссийская заочная многопредметная школа» (ОЛ ВЗМШ) Российской академии образования, работающий при Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова, в сорок шестой раз проводит набор учащихся.

ОЛ ВЗМШ – государственное учреждение дополнительного образования, причем не только для школьников. «ОТКРЫТЫЙ» – значит доступный для всех желающих пополнить свои знания в одной или нескольких из следующих областей науки: математика, биология, филология, физика, экономика, химия, правоведение, история, информатика (перечисление – в хронологическом порядке открытия отделений).

Сейчас ОЛ ВЗМШ совместно с другими научно-педагогическими учреждениями ведет исследовательские работы по разработке новых интерактивных технологий в образовании и переводу части своих учебно-методических комплексов на язык современных телекоммуникаций, в частности – по организации Интернет-отделения ОЛ ВЗМШ.

За время существования ВЗМШ удостоверения о ее окончании получили несколько сотен тысяч школьников и тысячи кружков – групп «Коллективный ученик ВЗМШ».

Обучение в школе ЗАОЧНОЕ, т.е. начиная с сентября–октября 2010 года все поступившие будут систематически получать специально разработанные для заочного обучения материалы, содержащие изложение теоретических вопросов, методов рассуждений, разнообразные задачи для самостоятельной работы, образцы решений задач, деловые игры, контрольные и практические задания.

Контрольные работы учащихся будут тщательно проверяться и рецензироваться преподавателями ВЗМШ – студентами, аспирантами, преподавателями и научными сотрудниками МГУ, а также других вузов и учреждений, где имеются филиалы школы. Многие из преподавателей в свое время сами закончили ВЗМШ и поэтому особенно хорошо понимают, как важно указать, помимо конкретных недочетов, пути ликвидации имеющихся пробелов в знаниях, порекомендовать дополнительную литературу, поругать за невнимательность и похвалить за заметный (а иногда – и за самый маленький) прогресс и трудолюбие.

Поступившие в ОЛ ВЗМШ смогут узнать об увлекательных вещах, часто остающихся за страницами школьного учебника, познакомиться с интересными нестандартными задачами и попробовать свои силы в их решении. Для многих станет откровением, что задачи бывают не только в математике, физике и химии, но и в биологии, филологии, экономике и других науках. Решение задач поможет прояснить, сделать интересными многие разделы, казавшиеся непонятными и скучными.

Одна из особенностей учебных программ и пособий ВЗМШ – в том, что они созданы действующими на переднем крае науки талантливыми учеными и опытными незаурядными педагогами. Недаром на X Всемирном конгрессе по математическому образованию, который прошел летом 2004 года в Дании, рассказ о 40-летней работе математического отделения ОЛ ВЗМШ вызвал неподдельный интерес и одобрение участников.

Чтобы успешно заниматься в заочной школе, вам придется научиться самостоятельно и продуктивно работать с книгой, грамотно, четко, коротко и ясно излагать свои мысли, а это, как известно, умеют далеко не все. Возможно, наша заочная школа поможет вам выбрать профессию, найти свое место в окружающем мире.

Все выполнившие программу ОЛ ВЗМШ получают дипломы. Хотя формальных преимуществ они не дают, приемные комиссии многих вузов учитывают, что обладатели этих удостоверений в течение продолжительного времени самоотверженно трудились над приобретением знаний, научились самостоятельно творчески работать, а это значит, что из них получатся хорошие студенты и, в дальнейшем, грамотные, вдумчивые, широко образованные специалисты.

Если у вас имеется такая возможность, вы будете частично общаться с нашей школой с помощью Интернета.

Для поступления в ОЛ ВЗМШ надо успешно выполнить вступительную контрольную работу. Приемную комиссию интересует, в первую очередь, ваше умение рассуждать, попытки (пусть поначалу не совсем удачные) самостоятельно мыслить и делать выводы. Преимуществом при поступлении пользуются проживающие в сельской местности, поселках и небольших городах, где нет крупных научных центров и учебных заведений и где получить дополнительное образование можно лишь заочно.

Решения задач вступительной работы надо написать на русском языке в обычной ученической тетради в клетку (на некоторые отделения – на открытке или на двойном тетрадном листе; см. ниже). Желающие поступить сразу на несколько отделений каждую работу присылают *в отдельной тетради.* На обложке тетради укажите: *фамилию, имя, отчество, год рождения, базовое образование* (сколько классов средней школы будет закончено *к сентябрю 2010 года), полный почтовый адрес* (с индексом), *откуда узнали об ОЛ ВЗМШ* (из «Кванта», от друзей, из афиш заочной школы и т.п.), *на какое отделение хотите поступить.*

Вступительные работы обратно не высылаются.

Без вступительной работы, только по заявлению, принимаются на индивидуальное обучение победители областных (краевых, республиканских) туров всероссийских олимпиад по соответствующим предметам, а также участники финальных туров этих олимпиад.

Учащиеся ОЛ ВЗМШ частично возмещают расходы на свое обучение. По просьбе тех, кто не в состоянии внести эту плату, ОЛ ВЗМШ готов обратиться в школу, в орган народного образования или к какому-либо спонсору с ходатайством об оплате этим благотворителем соответствующих расходов.

Помимо индивидуального обучения, на всех отделениях ВЗМШ, кроме биологического, имеется форма обучения «Коллективный ученик». Это группа учащихся, работающая под руководством преподавателя (школьного учителя, преподавателя вуза, студента или другого энтузиаста), как правило, по тем же пособиям и программам, что и индивидуально. *Прием в эти группы проводится до 15 октября 2010 года.* Для зачисления группы требуется заявление ее руководителя (с указанием его профессии и должности, со списком учащихся и сообщением о том, в каком классе они будут учиться с сентября 2010 года); заявление должно быть подписано руководителем группы, заверено и подписано руководителем учреждения, при котором будет работать группа. Работа с группами «Коллективный ученик» может оплачиваться школами как факультативные занятия.

Обо всех наших отделениях вы можете узнать на общешкольном сайте ОЛ ВЗМШ:

www.vzmsh.ru

На ваши вопросы мы ответим по электронной почте:

vzms@yandex.ru

На Северо-Западе России работает Заочная школа Ленинградского областного Министерства образования, созданная при Санкт-Петербургском государственном университете и имеющая отделения математики, биологии и химии.

Желающие поступить на отделение математики, проживающие на Северо-Западе России (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми республиках), высылают вступительные работы по адресу: 197755 Санкт-Петербург, Лисий Нос, Ново-Центральная ул., д. 21/7, Северо-Западная ЗМШ (на прием).

Проживающие в остальных регионах России, дальнем и ближнем зарубежье высылают свои работы по математике в адрес ОЛ ВЗМШ или соответствующего филиала.

Адрес ОЛ ВЗМШ: 119234 Москва, Воробьевы горы, МГУ, ОЛ ВЗМШ, на прием (укажите отделение)

Телефон: (495) 939-39-30

Адреса филиалов математического отделения ОЛ ВЗМШ:

241035 г.Брянск, ул. Мало-Орловская, д. 8,
тел.: (4832) 56-18-08, e-mail: brotek@mail.ru;

610002 г. Киров, а/я 2039, ЦДООШ,
тел.: (8332) 35-15-03, 35-15-04, e-mail: sms@extedu.kirov.ru,
сайт: http://cdoosh.kirov.ru;

150000 г. Ярославль, ул. Советская, д.14,
тел.: (0852) 11-82-03, e-mail: olimp@olimp.edu.yar.ru

Ниже вы найдете краткие сведения о каждом отделении ОЛ ВЗМШ и условия вступительных контрольных заданий.

Отделение математики

Из этого отделения, открывшегося в 1964 году, выросла вся заочная школа (вначале она так и называлась – математическая).

За время обучения вы более глубоко, чем в обычной школе, сможете осознать основные идеи, на которых базируется курс элементарной математики, познакомиться (по желанию) с некоторыми дополнительными, не входящими сейчас в школьную программу разделами, а также поучиться решать олимпиадные задачи. На последнем курсе большое внимание уделяется подготовке к ЕГЭ, олимпиадам и вступительным экзаменам в вузы.

На отделении созданы учебно-методические комплексы, приспособленные для заочного обучения. Часть из них издана массовым тиражом. Осуществляется перевод уже апробированных и вновь создаваемых материалов на электронный язык в интерактивном режиме, отделение готовится к работе в Интернете. Практически каждый год издаются и «проходят обкатку» новые пособия, расширяющие и дополняющие программу обучения.

Окончившие отделение математики получат, в зависимости от желания и способностей, либо подготовку, необходимую для выбора математики как профессии, либо математическую базу для успешного усвоения вузовского курса математики, лежащего в основе профессиональной подготовки по другим специальностям: ведь сейчас математика служит мощным инструментом исследований во многих отраслях человеческой деятельности. Поступившие в этом году на первый курс впоследствии смогут выбирать новые пособия, разработанные для будущих физиков и биологов, химиков и историков…

Обучение длится 5 лет. Можно поступить на любой курс. Для этого к сентябрю 2010 года надо иметь следующую базу: на 1-й курс – 6 классов средней школы, на 2-й курс – 7 классов, на 3-й – 8, на 4-й – 9, на 5-й – 10 классов. При этом поступившим на 2-й, 3-й и 4-й курсы будет предложена часть заданий за предыдущие курсы. Для поступивших на 5-й курс обучение проводится по специальной интенсивной программе.

Для поступления надо решить хотя бы часть задач помещенной ниже вступительной работы (около номера каждой задачи в скобках указано, учащимся каких классов она предназначена; впрочем, можно, конечно, решать и задачи для более старших классов). На обложке тетради напишите, на какой курс вы хотите поступить и в каком классе будете учиться с 1 сентября 2010 года.

Срок отправки вступительной работы – до 15 апреля 2010 года.

Группы «Коллективный ученик» (на все курсы по любой программе) принимаются без вступительной работы.

Работы можно отправлять по электронному адресу: priem@vzms.org

Сайт математического отделения:
http://math.vzms.org

Задачи

1 (6–10). В доску вбили 20 гвоздиков следующим образом. Сначала вбили 16 гвоздиков так, что они образовали квадратную сетку со стороной 3 см (с четырьмя вертикальными рядами и четырьмя горизонтальными строками), затем вбили еще 2 гвоздика – по одному с каждой стороны от второй строки (они образовали строку длины 5 см), а затем – еще 2 гвоздика, образующие пятую строку с двумя гвоздиками посреди строки (образовалась пятая строка длины 1 см). Пусть левый добавленный во вторую строку гвоздик имеет номер 1, а правый – номер 2. Можно ли натянуть нить длины 19 см так, чтобы она прошла от гвоздика 1 к гвоздику 2 через все 20 гвоздиков?

2 (6–10). Какую наибольшую сумму цифр может иметь восьмизначное число, делящееся на 8?

3 (6–10). На плантации вдоль прямой дороги растут в один ряд 2012 кустов крыжовника, причем количество ягод на любой паре соседних кустов отличается на 1. Может ли на всех кустах вместе быть: а) 5555 ягод; б) 403406 ягод?

4 (7–10). В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AN, высота BH и серединный перпендикуляр к стороне AB пересекаются в одной точке. Найдите угол A треугольника.

5 (6–10). В 2010 году Ларисе будет столько лет, какова сумма цифр года ее рождения. В каком году родилась Лариса?

6 (8–10). Известно, что α – корень уравнения $ax^2 + bx + b = 0$, β – корень уравнения $ax^2 + ax + b = 0$, а также, что $\alpha\beta = 1$. Найдите числа α и β.

7 (8–10). Можно ли расставить в клетках квадрата 3×3 числа так, чтобы сумма любых двух соседних по горизонтали чисел была равна 6, а произведение любых двух соседей по вертикали равнялось 4?

8 (8 – 10). Пусть H – основание высоты BH остроугольного треугольника ABC, точки K и L – основания перпендикуляров, опущенных из точки H на стороны AB и BC соответственно. Верно ли, что около четырехугольника $AKLC$ можно описать окружность?

9 (7–10). Существует ли четверка различных натуральных чисел таких, что сумма двух любых из них – натуральная степень числа 5?

10 (8–10). Пусть E и F – общие точки двух неравных пересекающихся окружностей, AD и BC – общие внешние касательные этих окружностей (A, B, C и D – точки касания, первые две – на одной окружности, остальные – на второй). В каком отношении делит прямая EF площадь четырехугольника $ABCD$, если известно, что отрезок AB втрое длиннее отрезка CD?

11 (8–10). Известно, что квадратный трехчлен $ax^2 + 2bx + c$ отрицателен при всех значениях аргумента x. Верно ли, что квадратный трехчлен $a^2x^2 + 2b^2x + c^2$ положителен при всех значениях аргумента x?

12 (8–10). Решите уравнение

$$x^{2010}+\frac{1}{x^{2010}}=1+x^{2011}.$$

Отделение биологии

Зачисление на отделение проводится на конкурсной основе по результатам вступительной работы. В конкурсе могут принять участие школьники, которые в этом учебном году занимаются в 8 или 9 классе, независимо от места проживания. Обучение для восьмиклассников длится 3 года, для девятиклассников – 2 года.

Учащимся восьмых классов необходимо решить задачи 1–5 помещенной ниже вступительной работы, девятиклассникам – задачи 2–6. В ответах можно использовать и факты, найденные в литературе, и собственные идеи. Просим для сведений, почерпнутых из книг, приводить ссылки на источники.

Вместе с работой пришлите конверт с маркой и заполненным адресом (для отправки решения приемной комиссии).

Срок отправки вступительной работы – не позднее 20 мая 2010 года.

Задачи

1. Какие приспособления помогают разным живым организмам обитать в условиях дефицита воды?

2. Доверившись рекламе, можно подумать, что главное в моющих средствах – максимально эффективное удаление загрязнений, а в инсектицидах – полнота истребления вредных насекомых. Однако экологи не согласятся с подобной трактовкой и заметят, что данные препараты должны удовлетворять еще многим требованиям. Перечислите эти требования.

3. Вам поручили проверить, действительно ли лосось руководствуется запахами, возвращаясь для нереста в водоем, где он родился, или же он использует какой-либо другой способ навигации. Опишите план ваших исследований.

4. Наземные позвоночные могут иметь шерсть, перья или чешую. Каковы сравнительные преимущества и недостатки каждого из этих типов покровов?

5. Многим животным свойственен половой диморфизм – различие между самцами и самками (помимо устройства половой системы). Назовите как можно больше признаков, по которым могут отличаться самцы и самки, указав, у каких организмов такие отличия имеются.

6. Почему невозможно установить общие для всех людей нормы питания: содержание в ежедневном рационе калорий, белков, жиров, углеводов и других веществ?

Отделение физики

Обучение на отделении одно-, двух- и трехгодичное. На трехгодичный поток (курс Ф3) принимаются оканчивающие в 2010 году 8 классов средней школы, на двухгодичный (курс Ф2) – оканчивающие 9 классов и на одногодичный (курс Ф1) – 10 классов. Учащиеся, оканчивающие десятый класс, могут пройти ускоренно всю программу за один год (курс Ф0). Для поступления на курс Ф3 нужно решить задачи 1–5 приведенной ниже вступительной работы, на курс Ф2 – задачи 4–9, на курс Ф1 – задачи 5–10, на курс Ф0 – задачи 4–10. На обложке тетради следует указать фамилию, имя и отчество, код курса (Ф0, Ф1, Ф2 или Ф3), сколько классов будет закончено к 1сентября 2010 года, полный почтовый адрес (с индексом), адрес e-mail (если есть), телефон.

Срок отправки вступительной работы – до 1 июня 2010 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются на курсы Ф1, Ф2, Ф3 без вступительной работы.

Сайт отделения физики: http://www. phys.problems.ru

Задачи

1. Два жука ползают с одинаковыми скоростями: один по треугольнику ACB, а другой – по треугольнику ACD, составляющим квадрат $ABCD$. Нарисуйте, как будет выглядеть траектория одного жука в системе отсчета, связанной с другим жуком. Известно, что жуки начинают двигаться одновременно из точки A вдоль диагонали AC.

2. В калориметр, содержащий воду массой $m_в = 200$ г при температуре $t_в = 50$ °C, кладут кусок льда при температуре $t_л = -5$ °C, в середину которого вмерзла свинцовая дробинка, общей массой $m = 110$ г. Когда растаяла $n = 1/10$ часть льда, оставшийся кусок утонул. Найдите конечную температуру системы. Необходимые константы отыщите самостоятельно. Теплоемкостью калориметра можно пренебречь.

3. Участок электрической цепи состоит из двух последовательно соединенных резисторов. Известно, что доля $n = 1/3$ всей мощности, потребляемой этим участком, рассеивается на первом резисторе. Какова будет эта доля, если к первому резистору параллельно присоединить еще один такой же резистор?

4. Часы, заведенные в полночь, ушли за 12 часов на полчаса вперед. Найдите, сколько времени минутная стрелка часов была впереди часовой за эти 12 часов. Считается, что впереди находится та стрелка, которая составляет больший угол с направлением на 12 часов, отсчитанный от этого направления по ходу движения стрелок.

5. Внутренняя поверхность цилиндрического сосуда представляет собой зеркало повсюду, кроме полосы из поглощающего материала, расположенной вдоль образующих цилиндра и занимающей $n = 1/6$ площади его поверхности (рис.1). В точке, диаметрально противоположной середине этой полосы, имеется маленькое отверстие. Под каким углом α к радиальному направлению нужно направить в отверстие лазерный луч в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, чтобы он вышел из этого же отверстия наружу? Каким будет угол между вышедшим и исходным лучами?

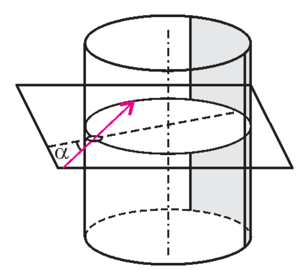


Рис. 1

6. Два маленьких мячика начинают одновременно падать без начальной скорости. Один из них вначале находится на высоте h над полом, а другой – на высоте $h/4$. Расстояние между мячиками по горизонтали L. Все удары мячиков о пол абсолютно упругие. Найдите зависимость расстояния между мячиками от времени и постройте соответствующий график.

7. Два бруска лежат на горизонтальном столе. Известно, что необходимо приложить горизонтальную силу $F_1 = 5$ Н, чтобы сдвинуть с места один из них, и силу $F_2 = 10$ Н, чтобы сдвинуть другой. Когда второй брусок положили на первый, то нижний оказалось возможным сдвинуть силой $F = 9$ Н. Какую минимальную силу нужно приложить, чтобы сдвинуть второй брусок, когда на нем сверху лежит первый?

8. Конструкция в форме прописной буквы М состоит из двух вертикальных столбиков длиной d, к которым подвешены две соединенные между собой рейки такой же длины (рис.2). Расстоя-

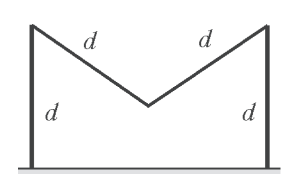


Рис. 2

ние между столбиками $3d/2$, масса рейки m. Растянута или сжата каждая из реек в направлении вдоль своей оси и с какой силой?

9. Мешочек с песком, подвешенный на веревке длиной $L = 1$ м, отводят в сторону на угол $\alpha = 90°$ и отпускают без начальной скорости. Начиная с этого момента и вплоть до момента, когда мешочек оказывается под точкой подвеса, из него высыпается песок. Найдите длину песчаного следа на полу, если известно, что расстояние между точкой подвеса и полом $h = 4$ м.

10. В закрытом баллоне находилась смесь кислорода массой m_1 и водорода массой m_2. В результате реакции весь кислород вступил в соединение с водородом. При этом температура увеличилась от T_1 до T_2. Во сколько раз изменилось давление газа в сосуде, если конденсации паров воды не произошло?

Отделение химии

На отделение принимаются учащиеся, имеющие базовое образование в объеме 8, 9 и 10 классов средней школы. Полная программа обучения на отделении – три года. Программа включает следующие одногодичные курсы:

- общая химия (с элементами неорганической химии);
- неорганическая химия;
- органическая химия;
- химия окружающей среды (полгода).

Если вы хотите научиться решать задачи, вам будет полезен курс «Методы решений задач по химии». Его можно совмещать с другими курсами.

Более подробные сведения о программе и порядке обучения высылаются вместе с извещением о решении Приемной комиссии.

Задачи вступительной работы, помещенные ниже, – общие для всех поступающих, независимо от базового образования.

Прием на отделение проводится в течение всего 2010 года. Но желательно отправить вступительную работу до 15 июня 2010 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы.

Наш сайт: http://www.chem-dist.ru

Задачи

1. Некоторая соль содержит 25,66% калия, 41,78% иода, 31,58% кислорода по массе. Найдите формулу соли. Как называется кислота, образующая эту соль?

2. Напишите уравнения электролитической диссоциации соли Na_2HAsO_4. Какую среду (кислую, нейтральную, щелочную) имеет водный раствор этой соли и почему?

3. Напишите уравнения реакций, с помощью которых можно осуществить такую цепочку превращений:

$$Mg \rightarrow Mg(OH)_2 \rightarrow MgCO_3 \rightarrow MgO \rightarrow MgCl_2 \rightarrow Mg(NO_3)_2.$$

Укажите условия проведения реакций.

4. 18,0 г угля сожгли в 36,7 л кислорода (при 25 °C). Продукты пропустили через 150 г 20%-го раствора гидроксида натрия. Найдите массы всех растворенных веществ.

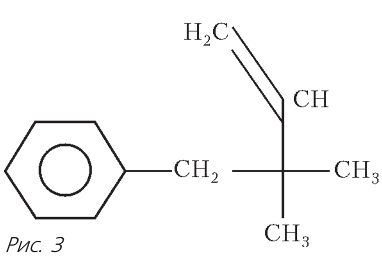


Рис. 3

5. Перечислите все продукты окисления приведенного на рисунке 3 вещества: а) холодным раствором $KMnO_4$ в щелочной среде; б) горячим раствором $KMnO_4$ в щелочной среде; в) раствором $KMnO_4$ в кислой среде.

Отделение филологии

За время существования отделения подготовлено и издано большое количество уникальных учебных пособий по русскому языку, общему языкознанию, истории и теории литературы.

На отделение принимаются все желающие, имеющие базовую подготовку в объеме 7 классов.

Отделение предлагает на выбор 18 учебных программ. Подробно о них рассказано на нашем сайте. Также сведения о программах и порядке обучения высылаются вместе с извещением о решении Приемной комиссии. При оценке вступительной работы учитывается, в каком классе вы учитесь.

Вы хотите исправить грамотность? Познакомиться с любопытными проблемами теории и практики русского языка? Освоить приемы лингвистического или литературоведческого анализа? Узнать кое-что о журналистике и оценить свои творческие способности? Приобрести навыки, необходимые для успешной сдачи ЕГЭ? Тогда выполните и пришлите нам вступительное задание, вопросы которого приведены ниже.

Внимание! На первой странице укажите следующие данные: Ф.И.О., какой класс заканчиваете, полный (с индексом!) почтовый адрес, телефон. Вместе с выполненным заданием пришлите, пожалуйста, стандартный конверт с маркой и заполненным вашим адресом (с индексом) для ответа Приемной комиссии.

Срок отправки вступительной работы – до 15 мая 2010 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы.

Если вопросы, предложенные нами, для вас пока сложны, но вы хотите у нас учиться, пришлите информацию о себе, и мы постараемся помочь.

Наш e-mail: filologiyvzmsh@mail.ru

Наш сайт: http://philologist.su

Вопросы

1. Предположим, вы – писатель-драматург, верный традиции наделять героев «говорящими» именами. Сочините небольшую сценку, в которой действуют 3–4 персонажа, наделите их «говорящими» именами. И создайте – по гоголевскому образцу! – «Замечания для господ актеров», объясняющие характеры и поведение ваших героев.

2. Откуда берется «музыка» поэзии? Проиллюстрируйте свои размышления любым поэтическим текстом.

3. Как вы думаете, почему в поэме Лермонтова «Мцыри» так много «огня»?

4. Определите, что не так в приведенных предложениях:

- Готовится диспут на тему «Свободное время подростка и как его убить?»
- Среди слушателей были студенты, которые лыка не вязали по-русски.
- Раскольников узнал, что его вызывают в милицию.

5. При разборе грамматических омонимов (омоформ) была «найдена» такая фраза:

Физика физика очень увлекает.

Представители каких еще специальностей, профессий, философских направлений и т. п. могли бы придумать о себе аналогичные омоформы? (Полностью фразы писать не нужно – они и так очевидны, достаточно написать, как называется такой человек. Не нужно также приводить очень похожие слова, образованные с помощью префиксов, например геофизик, биофизик и т. п.)

Отделение экономики

Обучение на отделении проводится по Интернету и электронной почте (также есть традиционная форма обучения с рассылкой материалов обычной почтой). Поступить на экономическое отделение могут все окончившие 7 классов, срок обучения от 1 года до 4 лет. Обучение индивидуальное или в кружке «Коллективный ученик».

Программа отделения включает изучение экономической теории и знакомство с практикой экономики и бизнеса. Среди учебных курсов отделения – основы экономики, предпринимательство и менеджмент, бухгалтерский учет и финансы, мировая экономика и география, экономическая история. Учащимся 9 классов мы поможем лучше подготовиться к Государственной итоговой аттестации (ГИА-9) по русскому языку и математике. Учащиеся 10–11 классов в дополнение к курсу экономики получат необходимую подготовку по русскому языку и литературе, математике, обществознанию, что поможет лучше сдать ЕГЭ, успешно участвовать в предметных олимпиадах и поступить в лучшие вузы страны. Ученики экономического отделения смогут заочно познакомиться с преподавателями, студентами и выпускниками МГУ им. М.В.Ломоносова. Они проведут для вас мастер-классы и познакомят с замечательными профессиями в экономике, одну из которых вы, возможно, выберете для себя в будущем.

Во время обучения ученики становятся участниками увлекательной бизнес-игры, которая будет вестись через Интернет или по переписке. Ниже опубликована карта страны Экония (рис.4), в городах которой участники откроют свои фирмы на время Игры. Города Эконии названы в честь выдающихся экономистов.

Рис. 4

Внимание: задание

В честь каких экономистов названы города Эконии? Постарайтесь разгадать как можно больше имен! Найти ответ на наш вопрос вам помогут Интернет, учебники и справочники, научно-популярные журналы (например, «Наука и жизнь»), друзья и учителя.

Ответы с именами экономистов присылайте по электронной почте: econ@vzms.ru ИЛИ на открытках с указанием полного почтового адреса и индекса, фамилии, имени и отчества (на открытках пишите, пожалуйста, ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ). Озаглавьте открытки или электронные письма так: «Экономика, вступительное задание-2010». Обязательно укажите класс, в котором вы сейчас учитесь. Пожалуйста, укажите источник информации об ОЛ ВЗМШ – журналы «Квант» или «Наука и жизнь», афиша, другое (например, «узнал от друзей»).

Срок отправки вступительной работы – до 15 мая 2010 года.

Наш адрес в Интернете: www.vzmsh.ru/page/econ

Отделение «Нравственность, право, закон» (право и граждановедение)

Школьникам 8–11 классов и группам «Коллективный ученик» предлагаются два курса.

1) Годовой курс «Беседы о правах человека, нравственности, праве, законе и государстве». В курсе даются современные представления об основных понятиях, связанных с правом, законом и государством, рассказывается об основах российского законодательства, правах человека. Разбираются примеры судебных процессов, приводятся общекультурные примеры, связанные с направленностью курса.

2) Полуторагодовой курс «Беседы об основах демократии».

Мы предлагаем проходить курсы именно в таком порядке. И только старшеклассники, если они не успевают пройти оба курса подряд, но обязательно хотят пройти именно второй курс, могут начинать прямо с него.

Желающие учиться должны сообщить свой полный почтовый адрес, адрес электронной почты (если есть), фамилию, имя и отчество, сколько классов закончено. При оценке вступительной работы, вопросы которой приведены ниже, мы учитываем возраст (базовое образование) поступающего. В письмо обязательно *вложите обычный конверт с маркой и вашим адресом* (чтобы мы могли вам ответить) и ответы на приведенные ниже вопросы.

Срок отправки вступительной работы – до 1 июня 2010 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы».

Вопросы

1. Управляя машиной, гражданин нарушил правила дорожного движения. Данное деяние является:

а) преступлением; б) проступком.

2. Для того чтобы человек чувствовал себя свободным, необходимо ли демократическое устройства жизни общества?

3. Назовите трех-четырех известных российских дореволюционных юристов.

4. Кому принадлежит фраза «Когда осядет пыль веков... о нас тоже будут вспоминать не за наши победы или поражения на поле битвы или в политике, а за то, что мы сделали для духовного развития человека»?

а) Дж. Кеннеди; б) Наполеону; в) Сталину; г) Бисмарку.

5. В приведенную цитату вставьте одно из слов, приведенных ниже. В цитате оно заменено многоточием: «... – это организованная, централизованная и авторитарная демократия».

а) Капитализм; б) фашизм; в) монархия; г) социализм.

Отделение истории

Обучение на отделении позволит всем, в том числе жителям самых отдаленных городов и деревень, расширить свой кругозор, подготовиться к единому государственному экзамену по истории. Успешно прошедшие курс обучения получают диплом.

А зачем нужно изучать историю? Во-первых, это просто интересно. Любопытно знать, как жили когда-то люди, во что одевались, чем питались, что читали, как женились и выходили замуж, за что боролись и «на что напарывались». Во-вторых, это полезно. Только зная прошлое, можно понять настоящее и прогнозировать будущее. Мы поможем вам в этом разобраться.

Специально для вас опытные преподаватели пишут книжки. Последние новости из мира истории вы узнаете одними из первых! Мы будем поддерживать с вами постоянную связь. По нашим книжкам вы будете выполнять особые задания и сообщать нам, что вы раскопали. Ведь, в сущности, труд историка и состоит из этих раскопок. Историк-археолог, копая землю и песок, отыскивает крупицы ушедших времен; историк-архивариус копается в груде бумаг и достает из архивов и даже из частной переписки все, что может позволить ему понять образ времени; историк-теоретик как увлекательный роман читает археологические таблицы, сухие сводки, статистику и восстанавливает по ним живую ткань ушедшей жизни. У историка особая профессия: он в одном лице следователь, прокурор и адвокат времени.

Вступительное задание на отделение, приведенное ниже, нужно выполнить на двойном листе бумаги.

Срок отправки вступительной работы – до 1 июня 2010 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы по заявлению руководителя.

Задание

1. Отгадайте, кто это:

• Русский промышленник, ситцевый магнат, меценат.

• Его жена и друг, Вера Николаевна, – урожденная Мамонтова.

• Молодой купец с гидом и картой объехал все европейские музеи и сделался тонким знатоком живописи.

• В 24 года основал в своем родовом доме частную галерею русской живописи.

• В 60 лет передал свою галерею в дар Москве.

• Из всех современных ему художников предпочитал передвижников.

• Мечтал найти иконы Рублева, но удача улыбнулась другому коллекционеру.

• Стал первым директором основанного им музея, тратил на него все свои сбережения, но из скромности никогда не являлся на собственные юбилеи.

• Совершенно бескорыстен. Его бумажник всегда был открыт для нуждающихся.

• С художниками никогда не торговался. Заказывая картины, платил сполна.

• Его именем назван национальный музей и станция метро в Москве.

• Его портрет работы Репина украшает залы созданного им музея.

• Его последние слова родственникам: «Берегите галерею».

2. Опишите, не более чем в 7 предложениях, политический портрет второго президента России.

Внимание!

ОЛ ВЗМШ проводит набор на курс «Обществознание». Курс включает следующие дисциплины: философия, человек и общество, политология, теория государства, государственное устройство России, право, экономика.

Слушателям направляются оригинальные учебные пособия, созданные на основе многолетнего опыта работы авторов курса. Проверка знаний осуществляется с помощью общепринятой системы тестирования.

Программа курса рассчитана на 1 год. Обучение носит заочный характер и имеет целью дать выпускникам школ – как крупных городов, так и небольших сел – глубокие знания по общественным дисциплинам, подготовить их к успешной сдаче ЕГЭ по обществознанию.

Для записи на курс необходимо отправить заявление *до 1 июня 2010 года.* В заявлении укажите фамилию, имя, отчество, свой полный домашний адрес (с индексом), класс, в котором вы будете учиться с 1 сентября 2010 года.

Заявление отправьте по адресу: *119234 Москва, Воробьевы горы, МГУ, ОЛ ВЗМШ (курс «Обществознание»).*

Отделение информатики

Прием ведется на курс «Программирование для начинающих».

На отделение принимаются все желающие с образованием не ниже 6 классов средней школы. Обучение индивидуальное или в группах «Коллективный ученик». Для успешного выполнения практических заданий должна быть возможность работы на компьютере. За год обучения учащиеся освоят основные конструкции языка Паскаль, изучат простейшие алгоритмы и в качестве итоговой работы напишут игровую программу. Успешно сдавшие все задания смогут продолжить обучение в следующем году.

Для зачисления необходимо прислать анкету с ответами на приведенные ниже вопросы.

Внимание! Ответы на вопросы анкеты присылайте на двойном тетрадном листе, указав на первой странице важные для нас данные: Ф.И.О., класс, который вы заканчиваете, полный (с индексом!) почтовый адрес, e-mail (если есть). Пишите развернутые ответы на вопросы.

Срок отправки анкеты – до 15 мая 2010 года.

Наш сайт: http://vzms.programming-school.ru

Вопросы

1. Изучаете ли вы в школе информатику? Какие темы вы изучили?

2. Что такое информатика? Что изучается в разделе «Программирование»?

3. Изучали ли вы какие-нибудь языки программирования? Какие?

4. Какие операционные системы вы знаете?

5. Какие программы установлены на компьютере, за которым вы работаете?

6. Есть ли у вас возможность выхода в Интернет?

7. Знаете ли вы, что такое: а) циклы; б) массивы; в) функции; г) условия?

8. Что такое рекурсия, индукция? В чем различия между ними?

9. По кругу выложены 15 камушков, в порядке увеличения веса. Внешне все камушки отличаются друг от друга: состоят из разных пород, имеют различную окраску, форму, вес, объем и т.д. Как при помощи чашечных весов без стрелок и гирек найти самый тяжелый камень, сделав при этом как можно меньше взвешиваний?

Федеральная заочная физико-техническая школа при МФТИ

Федеральная заочная физико-техническая школа (ФЗФТШ) при Московском физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий и т. п.), расположенных на территории Российской Федерации, на 2010/11 учебный год.

ФЗФТШ при МФТИ как государственное образовательное учреждение профильного дополнительного образования детей работает с 1966 года. За прошедшие годы школу окончили более 80 тысяч учащихся; практически все ее выпускники поступают в ведущие вузы страны, а каждый второй студент МФТИ – ее выпускник. Финансирует школу Федеральное агентство по образованию. Обучение для учащихся, проживающих в Российской Федерации, – бесплатное.

Научно-методическое руководство школой осуществляет Московский физико-технический институт (государственный университет).

Цель нашей школы – помочь учащимся 8–11 классов общеобразовательных учреждений, интересующимся физикой и математикой, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам, а также способствовать их профессиональному самоопределению.

Набор в 8, 9, 10 и 11 классы на 2010/11 учебный год проводится на заочное, очно-заочное и очное отделения.

Заочное отделение *(индивидуальное обучение)*

Тел./факс: (495) 408-51-45, e-mail: zftsh@ mail.mipt.ru

Прием на заочное отделение проводится на конкурсной основе по результатам выполнения приведенного ниже вступительного задания по физике и математике. Полная программа обучения рассчитана на 4 года, т.е. на 8–11 классы, но поступать можно в любой из указанных классов.

В течение учебного года, в соответствии с программой ФЗФТШ, ученик будет получать по каждой учебной теме задания по физике и математике (5 заданий по каждому предмету для 8 класса, 6–7 заданий по каждому предмету для 9, 10 и 11 классов), а затем рекомендуемые авторские решения этих заданий вместе с проверенной работой. Задания содержат теоретический материал, разбор характерных примеров и задач по соответствующей теме и 8–12 контрольных вопросов и задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Задания составляют опытные преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ, а также выпускники МФТИ. Работы учащихся-заочников проверяют студенты, аспиранты и выпускники МФТИ (из них 80% – выпускники нашей школы).

Срок отправления решения вступительного задания – *не позднее 1 марта 2010 года*. Проверенные вступительные работы обратно поступающему не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 2010 года.

Вне конкурса в ФЗФТШ принимаются *победители* областных, краевых, республиканских, всероссийских олимпиад по физике и математике 2009/10 учебного года. Им необходимо до 15 мая 2010 года выслать в ФЗФТШ выполненную вступительную работу по физике и математике вместе с копиями дипломов, подтверждающих участие в перечисленных выше олимпиадах.

Тетрадь с выполненными заданиями (по физике и математике) высылайте по адресу:

141700 Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д.9, ФЗФТШ при МФТИ.

Вступительное задание по физике и математике ученик выполняет самостоятельно в одной школьной тетради на русском языке, сохраняя тот же порядок задач, что и в задании. Тетрадь нужно выслать в конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). На *внутреннюю* сторону обложки тетради наклейте справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса. На *лицевую* сторону обложки наклейте лист бумаги, четко заполненный по приведенному ниже образцу.

Образец

Л. №								
№ задачи	1	2	3	…	14	15	16	Σ
М.								
Ф.								

1. Республика, край, область	*Кемеровская область*
2. Фамилия, имя, отчество	*Чистова Галина Сергеевна*
3. Класс, в котором учитесь	*восьмой*
4. Номер школы	*35*
5. Вид школы (обычная, лицей, гимназия, с углубленным изучением предмета)	*лицей*
6. Подробный домашний адрес (с указанием индекса), телефон, e-mail	*654041 г. Новокузнецк, ул. Волжская, д.74, кв.3, e-mail: dio@rdsc.ru*
7. Место работы и должность родителей:	
отец	*доцент*
мать	*врач*
8. Адрес школы и телефон, факс, e-mail	*654041 г. Новокузнецк, ул. Циолковского, д. 65*
9. Фамилия, имя, отчество преподавателей:	
по физике	*Григорьева Алена Михайловна*
по математике	*Горшенина Нина Анатольевна*
10. Каким образом к вам попало это объявление?	

На конкурс ежегодно приходит более 3 тысяч вступительных работ. Пожалуйста, обратите внимание на правильность заполнения анкеты! Пишите аккуратно, лучше печатными буквами.

Для получения ответа на вступительное задание и для отправки вам первых заданий *обязательно* вложите в тетрадь *два одинаковых* бандерольных конверта размером 160×230 мм. На конвертах четко напишите свой домашний адрес.

Очно-заочное отделение *(обучение в факультативных группах)*

Тел./факс: (498) 744-63-51, e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Факультативные группы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении *двумя преподавателями* – физики и математики, в отдельных случаях разрешается обучение по одному предмету. Руководители факультатива принимают в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ФЗФТШ.

Группа (не менее 7 человек) принимается в школу, если директор общеобразовательного учреждения сообщит в ФЗФТШ фамилии, имена, отчества ее руководителей и поименный алфавитный список обучающихся (Ф.И.О. полностью, с указанием класса *текущего учебного года и итоговых оценок* за вступительное задание по физике и математике, домашний адрес учащихся, с указанием индекса, телефона и e-mail), телефон, факс и e-mail школы. Все эти материалы и конверт для ответа о приеме в ФЗФТШ с обратным адресом одного из руководителей следует выслать *до 25 июня 2010 года* по адресу: 141700 Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д.9, ФЗФТШ при МФТИ (с пометкой «Факультатив»). *Тетради с работами учащихся не высылаются.*

Работа руководителей факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением как руководство профильными факультативными занятиями по предоставлении ФЗФТШ при МФТИ соответствующих сведений.

Руководители, работающие с учащимися, будут *в течение учебного года* получать учебно-методические материалы (программы по физике и математике, задания по темам программ, решения заданий с краткими рекомендациями по оценке работ учащихся), приглашаться на курсы повышения квалификации учителей физики и математики, проводимые на базе МФТИ. Работы учащихся проверяют и оценивают руководители факультативных групп, а в ФЗФТШ ими *высылаются ведомости с итоговыми оценками по каждому заданию и итоговая ведомость за год.*

Очное отделение *(обучение в вечерних консультационных пунктах)*

Тел.: (498) 744-65-83, e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Для учащихся Москвы и Московской области по программе ФЗФТШ работают вечерние консультационные пункты. Набор в них проводится по результатам вступительных экзаменов по физике и математике и собеседования, которые проходят во второй половине сентября.

Программы ФЗФТШ при МФТИ являются профильными дополнительными образовательными программами и едины для всех отделений. Кроме того, ученикам всех отделений будет предложено участвовать в физико-математической олимпиаде «ФИЗТЕХ-2010», которая, как правило, проводится на базе МФТИ и в ряде городов России в конце марта, в других очных и заочных олимпиадах МФТИ и его факультетов. Для учащихся 9–11 классов на базе МФТИ работает субботний лекторий по физике и математике по программе ФЗФТШ. Лекции читают преподаватели института (как правило, авторы заданий). Подробнее об этих мероприятиях можно прочитать на сайте ФЗФТШ:

http://www.school.mipt.ru

По окончании учебного года учащиеся, успешно выполнившие программу ФЗФТШ, переводятся в следующий класс, а выпускники (одиннадатиклассники) получают свидетельство об окончании школы с итоговыми оценками по физике и математике, которое учитывается на собеседовании при поступлении в МФТИ.

Ученикам, зачисленным в ФЗФТШ, будет предложено оплатить безвозмездный целевой взнос для обеспечения учебного процесса в соответствии с уставными целями школы. Сумма взноса может ориентировочно составлять для учащихся заочного отделения 1800–2500 руб. в год, для очного 2500–3700 руб. в год, для очно-заочного 2500 — 4000 руб. (с каждой факультативной группы) в год.

Для учащихся Украины работает Киевский филиал ФЗФТШ при МФТИ (обучение платное). Желающим в него поступить следует высылать работы по адресу: 03680 Украина, г. Киев, б-р Вернадского, д.36, ГСП, Киевский филиал ФЗФТШ при МФТИ. Телефоны: 8(10-38-044) 424-30-25, 8(10-38-044) 422-95-64.

Для учащихся из зарубежных стран возможно только платное обучение на заочном и очно-заочном отделениях.

Ниже приводятся вступительные задания по математике и физике. Номера задач, обязательных для выполнения (заочное и очно-заочное отделения), даны в таблице (номера классов указаны на текущий 2009/10 учебный год).

	7 класс	8 класс	9 класс	10 класс
Математика	1–5	4–8	6–11	9–14
Физика	1–5	6–10	8–13	11–16

Вступительное задание по математике

1. Лодка спускается по течению реки на 30 км, а затем, не теряя времени, разворачивается и поднимается вверх по течению на 26 км. Скорость течения реки 1 км/ч, а собственная скорость лодки может меняться в пределах от 5 км/ч до 9 км/ч. Какое наименьшее и какое наибольшее время может занять такая поездка?

2. Три брата собирали в своем саду урожай слив. Первый брат собрал $\frac{1}{3}$ всех слив и еще 2 кг, второй брат собрал $\frac{1}{4}$ всех слив и еще 1 кг, а третий брат собрал половину тех слив, которые не собрали первые два брата. После этого осталась несобранной $\frac{1}{6}$ часть первоначального количества слив. Сколько слив (в килограммах) было в саду до начала сбора урожая?

3. Задумано некоторое двузначное число. Если в нем поменять местами первую и вторую цифры, а затем из результата вычесть 27, то получится задуманное число. Если же первую цифру задуманного числа умножить на $\frac{11}{6}$ и вычесть из этого вторую цифру числа, умноженную на $\frac{14}{15}$, то получится 1,7. Какое число было задумано?

4. Введите на клетчатой бумаге систему координат. Отметьте точки $A(-2;\ 7)$, $B(1;\ -2)$, $C(-4;\ -7)$, $D(2;\ -5)$, $E(3;\ -8)$, $F(5;\ -4)$, $G(14;\ -1)$, $H(8;\ 2)$, $K(11;\ 8)$, $L(6;\ 3)$ и соедините их последовательно отрезками AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HK, KL, LA. Найдите площадь полученной фигуры (площадь одной клетки считать равной 1 м^2).

5. Свежие подосиновики содержат 93% воды (по массе), а в сушеных подосиновиках массовая доля воды составляет $\frac{2}{9}$. Какая масса сушеных подосиновиков получится из 20 кг свежих?

6. При каких значениях параметров a и b система уравнений

$$\begin{cases} ax + 3y = 2, \\ 5x - 4y = b \end{cases}$$

а) не имеет решений; б) имеет бесконечно много решений; в) имеет ровно одно решение? Найдите эти решения (для пунктов б) и в)).

7. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает продолжение стороны CD за точку C в точке F, а биссектриса угла B пересекает продолжение стороны CD за точку D в точке E. Известно, что $\angle AFE = 30^\circ$, $BC = 7$, $EF = 12$. Найдите длину отрезка BH, где H – это точка пересечения двух данных биссектрис.

8. Бригада лесорубов должна была по плану заготовить $286\ м^3$ древесины. Первые шесть дней бригада выполняла установленную планом ежедневную норму, а затем каждый день заготавливала на $9\ м^3$ сверх плана. Поэтому за день до срока было заготовлено $296\ м^3$ древесины. Сколько кубических метров древесины в день бригада должна была заготавливать по плану?

9. В прямоугольный треугольник с периметром 36 вписана окружность. Гипотенуза точкой касания делится в отношении 2 : 3. Найдите длины сторон треугольника.

10. Требуется соорудить железнодорожную насыпь, имеющую 170 м в длину, а в поперечном сечении – равнобокую трапецию с нижним основанием 6 м и углом откоса $45°$. Какую высоту h может иметь эта насыпь, если объем земляных работ должен составить не менее $850\ м^3$, но не более $1190\ м^3$? (Объем насыпи равен произведению ее длины на площадь ее поперечного сечения.)

11. а) Изобразите на координатной плоскости фигуру M, состоящую из точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 10x + y^2 - 6y \le 2, \\ y \ge \sqrt{3}x + 3 - 5\sqrt{3}. \end{cases}$$

б) Найдите площадь фигуры M.

12. Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 + 7x + 1} + \sqrt{12x^2 + 28x + 13} = \sqrt{9x^2 + 21x + 12}\ .$$

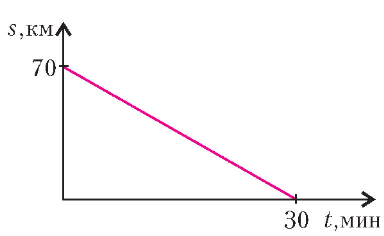
13. Дана окружность радиуса 2 с центром в точке O. Из конца отрезка OP, пересекающегося с окружностью в точке K, проведена касательная PE к окружности (E – точка касания), причем $\angle EOP = 60°$. Найдите радиус окружности, касающейся отрезков PE, PK и дуги KE.

14. Известно, что $\sin\alpha + \sin 3\alpha = 0{,}7$. Найдите значение выражения $\cos 6\alpha - \cos 2\alpha + 2\cos 4\alpha$.

Вступительное задание по физике

1. В сосуд с горизонтальным дном и вертикальными стенками налита вода. Площадь основания внутренней части сосуда $S = 25\ см^2$. Металлический цилиндр с площадью основания $S_1 = 10\ см^2$ устанавливают торцом на дно сосуда. При этом уровень воды составляет $h_1 = 10$ см, а верхний торец цилиндра выступает из воды. Определите массу воды в сосуде.

2. Населенные пункты $А$ и $Б$, расстояние между которыми $L = 70$ км, соединяет прямолинейный участок шоссе. Из пунктов $А$ и $Б$ одновременно навстречу друг другу начинают движение автобус и легковой автомобиль. Скорость автомобиля 80 км/ч. На рисунке представлен график, на котором показано, как изменялось расстояние s между автобусом и автомобилем с момента выезда до момента встречи. Найдите скорость автобуса. Через какое время после момента встречи с легковым автомобилем автобус доедет до пункта $Б$? Считать, что скорости автобуса и автомобиля остаются постоянными во время всего движения.



3. Три бегуна участвуют в забеге на 400 м по соседним дорожкам. Спортсмен, стартовавший по первой дорожке, финишировал первым через 56 с, бегун на третьей дорожке отстал от победителя на 2 с. Определите скорость бегуна на второй дорожке, если известно, что в момент финиша победителя все три бегуна располагались на одной прямой. Скорости бега спортсменов считать постоянными на всей дистанции.

4. Пружина динамометра имеет в недеформированном состоянии длину $l_0 = 20$ см. Под действием силы $F = 1$ Н она удлинилась на 1%. Если к этому динамометру подвесить медный шар, то пружина удлинится на $\Delta l = 5$ мм. Чему равен объем медного шара? Считать $g = 9{,}8$ Н/кг.

5. Сосуд с вертикальными стенками состоит из двух цилиндров: нижнего узкого высотой H и площадью поперечного сечения S_1 и верхнего широкого площадью поперечного сечения S_2. При наливании в сосуд воды объемом V_1 уровень воды устанавливается ниже H, а давление воды на дно сосуда оказывается равным p_1. При доливании в сосуд воды объемом V_2 уровень воды поднимается выше H, а давление воды на дно сосуда оказывается равным p_2. Найдите H и S_1, считая известными величины S_2, V_1, V_2, p_1, p_2 и плотность воды. Атмосферное давление не учитывать.

6. Тонкостенный стакан цилиндрической формы плавает в вертикальном положении дном вниз в сосуде с водой. Высота части стакана, находящейся в воде, равна h, высота всего стакана H. Какой максимальной толщины слой масла можно долить в стакан, чтобы он еще не утонул? Плотности масла и воды известны.

7. Составной стержень представляет собой два соосных цилиндра разной длины, прижатых друг к другу торцами. Цилиндры имеют одинаковые площади поперечного сечения, но изготовлены из материалов с плотностями $\rho_1 = \rho$ и $\rho_2 = 2\rho$. Оказалось, что стержень будет находиться в равновесии в горизонтальном положении, если его подвесить на нити, закрепленной на месте стыка. Определите отношение масс цилиндров.

8. Экспериментатору требуется нагреть воду от $t_1 = 10$ °С до температуры кипения при нормальных условиях. Для этого он одновременно включает в сеть два нагревателя. Первый нагреватель, имеющий мощность $P_1 = 500$ Вт, установлен в стеклянном сосуде массой $m_{с1} = 200$ г, содержащем $V_1 = 0{,}5$ л воды. Второй нагреватель имеет мощность $P_2 = 1{,}2$ кВт и установлен в стеклянном сосуде массой $m_{с2} = 500$ г, содержащем $V_2 = 1$ л воды. В каком из сосудов вода нагреется быстрее? Найдите время, необходимое для нагревания воды до температуры кипения в каждом из сосудов. Считать начальные температуры воды и сосудов равными, потерями теплоты пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c_в = 4200$ Дж/(кг · °С), удельная теплоемкость стекла $c_с = 840$ Дж/(кг · °С).

9. В сосуд, где находится вода при температуре $t_в = 90$ °С, помещают нагретый стальной брусок, масса которого равна массе воды. Найдите начальную температуру стального бруска, если известно, что после прекращения кипения в сосуде установилась температура $t = 100$ °С и уровень воды остался первоначальным. Удельная теплоемкость воды $c_в = 4200$ Дж/(кг · К), удельная теплоемкость стали $c_{ст} = 460$ Дж/(кг · К), удельная теплота парообразования воды при температуре кипения $L_в = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг, плотность стали $\rho_{ст} = 7800\ кг/м^3$, плотность воды $\rho_в = 1000\ кг/м^3$. Потерями тепла на нагревание сосуда и окружающего пространства и изменением плотности воды при нагревании пренебречь.

10. Из проволоки постоянного поперечного сечения изготовлен квадрат $ABCD$. При подключении источника постоянного напряжения с помощью проводов с малым сопротивлением, по сравнению с сопротивлением проволоки, к соседним вершинам квадрата A и B полная сила тока в цепи равна 64 мА. Какой силы ток будет протекать по стороне AD, если тот же источник напряжения подключить к вершинам A и C?

11. Мотоциклист разгоняется с места с ускорением $a = 2$ м/с^2. Определите длину участка разгона, время разгона и скорость в конце разгона, если известно, что первая половина участка была пройдена мотоциклистом за 3 с.

12. Неподвижный снаряд взрывается в некоторой точке над землей. При этом образуется множество осколков. Осколки разлетаются во все стороны с одинаковыми по модулю скоростями. Время полета осколка, упавшего на землю раньше других, равно t_1, а время полета осколка, упавшего позже всех, равно t_2. Определите радиус области падения на землю осколков, полетевших горизонтально. Сопротивление воздуха не учитывать.

13. Два бруска массами $m_1 = m$ и $m_2 = 2m$ находятся на горизонтальной шероховатой поверхности. Бруски связаны легкой нерастяжимой нитью. Известно, что если заставить бруски равномерно скользить, прикладывая внешнюю горизонтальную силу F к первому бруску, то сила натяжения нити оказывается в k раз меньше силы F. Во сколько раз отличаются коэффициенты трения скольжения μ_1 и μ_2 брусков о поверхность?

14. Внутри закрытого с обоих концов горизонтально расположенного цилиндра объемом $V_0 = 58$ дм^3 имеется тонкий поршень, который может скользить в цилиндре без трения. Первоначально с одной стороны от покоящегося поршня находится водород (H_2) массой $m_1 = 3$ г, а с другой – азот (N_2) массой $m_2 = 17$ г. Определите занимаемые газами объемы, а также давления газов. Температура газов поддерживается постоянной и равной $T = 300$ К.

15. В цилиндре объемом $V_1 = 10$ л под поршнем находится влажный воздух при температуре $t = 20$ °С и давлении $p_1 = 13{,}3$ кПа. Относительная влажность воздуха $\varphi = 70\%$. Каково будет давление в цилиндре, если объем при той же температуре уменьшить в $k = 10$ раз? Давление насыщенных паров воды при температуре $t = 20$ °С равно $p_{\text{нп}} = 2{,}33$ кПа.

16. Точечный положительный заряд величиной q расположен на расстоянии $2R$ от центра закрепленной равномерно заряженной непроводящей сферы радиусом R. На заряд со стороны сферы действует сила отталкивания, модуль которой равен F. Точечный заряд через малое отверстие в сфере перемещают в ее центр. Какую минимальную работу нужно совершить для этого внешним силам? Считать, что электрическое поле сферы с отверстием совпадает с полем равномерно заряженной сферы. Краевыми эффектами вблизи отверстия пренебречь.

Новый прием в школы-интернаты при университетах

Специализированный учебно-научный центр (СУНЦ) МГУ (школа имени академика А.Н. Колмогорова), а также СУНЦ НГУ, СУНЦ УрГУ и Академическая гимназия СПбГУ объявляют набор учащихся в 10 классы (двухгодичное обучение) на физико-математическое и химико-биологическое отделения и в 11 классы (одногодичное обучение) на физико-математическое отделение. В рамках двухгодичного физико-математического отделения кроме основного профиля выделяется компьютерно-информационный класс (СУНЦ МГУ). Химико-биологическое отделение представлено специализациями по химии и биологии.

Зачисление в школу проводится на конкурсной основе. Первый (необязательный) тур экзаменов – заочный письменный экзамен по математике и физике или химии. Успешно выдержавшие заочный экзамен в апреле-мае приглашаются в областные центры Российской Федерации на устные экзамены. Однако *допускается участие в очном туре школьников, не участвовавших в заочном туре.*

Победители заочного тура СУНЦ МГУ будут приглашены на очный тур (в марте 2010 года, вместе с победителями проекта «Покори Воробьевы горы»), где получат возможность досрочно поступить в СУНЦ МГУ.

Ниже приводятся условия задач *заочного* вступительного экзамена. Работа должна быть выполнена в обычной ученической тетради, на обложке которой указываются фамилия, имя, отчество (полностью), желаемый профиль обучения, подробный домашний адрес с индексом, контактные телефоны (домашний и мобильный), электронный адрес (если имеется), адрес и номер школы, класс.

Работу нужно отправить простой бандеролью на имя Приемной комиссии по одному из следующих адресов (в зависимости от выбранного учебного заведения):

121357 Москва, Кременчугская ул., 11, СУНЦ МГУ (внимание: жители Москвы принимаются в школу без предоставления общежития), телефон Приемной комиссии: (495)445-11-08, сайт: http://www.pms.ru, e-mail: priem@pms.ru;

199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/96, Академическая гимназия;

620137 Екатеринбург, ул. Голощекина, 30, СУНЦ УрГУ;

630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, СУНЦ НГУ (Олимпиадный комитет).

Срок отправки работ – *не позднее 15 февраля 2010 года* (по почтовому штемпелю). Работы, высланные позже этого срока, рассматриваться не будут. *Обязательно вложите конверт с маркой, заполненный на ваш домашний адрес с индексом.*

Если вы не сможете решить все задачи – не отчаивайтесь: Приемная комиссия рассмотрит работы с любым числом решенных задач.

Вступительные экзамены второго, *очного* тура будут проводиться с 20 марта по 20 мая 2010 года по регионам.

Вступительное задание заочного тура

Математика

Для поступающих в 10 класс

1. Найдите все трехзначные числа, квадраты десятичной записи которых оканчиваются цифрами 1001.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 - y = 6, \\ y^3 - z = 6, \\ z^3 - x = 6. \end{cases}$$

3. Мимо наблюдателя по шоссе проехали с равными промежутками времени автобус, грузовик и легковой автомобиль. Через некоторое время мимо второго наблюдателя они проехали с теми же промежутками времени, но уже в другом порядке: легковой автомобиль, грузовик, автобус. Найдите скорость автобуса, если скорость легкового автомобиля 120 км/ч, а скорость грузовика 60 км/ч.

4. Точка P лежит на диагонали BD параллелограмма $ABCD$. Прямая AP пересекает прямые BC и CD в точках M и N соответственно. Найдите AP, если $AM = m$, $AN = n$.

5. Натуральные числа 1, 2, …, 200 разбили на 50 множеств. Всегда ли можно в каком-нибудь из этих множеств найти 3 числа, являющихся длинами сторон некоторого треугольника?

6. Можно ли на графике функции $y = x^3$ найти точку A, а на графике функции $y = x^3 + \sqrt{x} + 1$ – точку B так, чтобы длина отрезка AB оказалась меньше $\frac{1}{100}$?

Для поступающих в 11 класс

1. Найдите все четырехзначные числа, квадраты которых оканчиваются цифрами 10001.

2. Мимо наблюдателя по шоссе проехали через равные промежутки времени автобус, грузовик, легковой автомобиль и мотоцикл. Мимо второго наблюдателя они проехали через те же промежутки времени, но в обратном порядке: мотоцикл, легковой автомобиль, грузовик, автобус. Найдите скорости грузовика и автобуса, если скорость мотоцикла 90 км/ч, а скорость легкового автомобиля 60 км/ч.

3. Высота AH треугольника ABC равна его медиане BM. На продолжении стороны AB за точку B отложили отрезок BD, равный стороне AB. Найдите угол BCD.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^5 - y^2 = 28, \\ y^5 - z^2 = 28, \\ z^5 - x^2 = 28. \end{cases}$$

5. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) проведена высота CD. Пусть CE и CF – биссектрисы углов ACD и BCD соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ECF, если радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, равен r.

6. См. задачу 6 для 10 класса.

Физика

(физико-математическое отделение)

Для поступающих в 10 класс

1. Два корабля идут встречным курсом строго параллельно направлению север-юг с одинаковыми скоростями 20 км/ч. Шлейф дыма одного корабля вытянулся строго на запад, а шлейф дыма второго корабля вытянулся в направлении строго на северо-запад. Найдите по этим данным скорость ветра, считая ее неизменной.

2. Найдите расстояние между звездами в двойной звездной системе, если сумма их масс равна двум солнечным массам, а период обращения вокруг центра масс равен двум земным годам. Ответ дайте в астрономических единицах.

3. Канат массой M висит вертикально, касаясь нижним концом поверхности пола. Определите максимальную силу, с которой канат будет действовать на пол, если верхний конец каната отпустить.

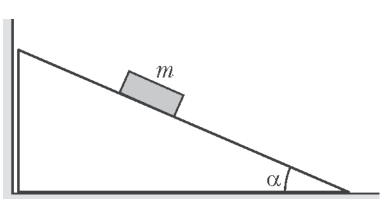


Рис. 1

4. Найдите силу, действующую на стенку со стороны клина при соскальзывании с него груза массой m (рис.1). Угол при основании клина α, коэффициент трения между грузом и поверхностью клина μ. Между клином и полом трения нет.

5. Автомобиль со всеми ведущими колесами трогается с места и равномерно набирает скорость, двигаясь по горизонтальному участку дороги, представляющему собой дугу окружности с углом $\alpha = 30°$ и радиусом $R = 100$ м. С какой максимальной скоростью автомобиль может выехать на прямой участок пути? Коэффициент трения колес о землю $\mu = 0{,}3$.

Для поступающих в 11 класс

1. Ракета удаляется от поверхности Земли с постоянной скоростью v_0, направленной строго вертикально. Из неподвижного орудия под углом $\alpha = 60°$ к горизонту выпускается снаряд с такой же по величине начальной скоростью v_0. Через сколько времени после выстрела скорости ракеты и орудия будут взаимно перпендикулярны в системе отсчета, движущейся поступательно вместе со снарядом? Сопротивлением воздуха пренебречь. Поверхность Земли считать плоской.

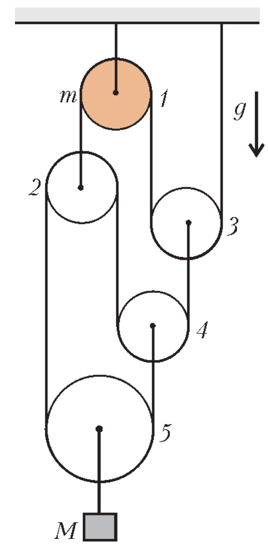


Рис. 2

2. Найдите величины и направления ускорений всех блоков, изображенных на рисунке 2. Определите направления их вращения. Массы бруска и верхнего блока равны M и m соответственно, остальные блоки невесомы. Нить невесома и нерастяжима. В начальный момент система покоилась.

3. Обкладки плоского конденсатора площадью S каждая несут заряды $+q$ и $+2q$. Расстояние между ними d. Сколько выделится тепла, если обкладки соединить проводником?

4. На одинаковых расстояниях друг от друга расположены n параллельных проводящих пластин площадью S каждая, несущие заряды $q_1, q_2, \ldots, q_n$ соответственно. Первую и последнюю пластины соединяют проводником. Найдите заряд q', прошедший через этот проводник. Расстояния между пластинами считать много меньше их размеров.

Химия

(химико-биологическое отделение)

1. При полном сгорании 1 моля уротропина (сухое горючее) $C_6H_{12}N_4$ в избытке кислорода выделяется 4212 кДж тепла. Сколько тепла выделится, если для сжигания использовано 5,6 л кислорода (н.у.) и соответствующее количество уротропина? Какая масса уротропина при этом сожжена? Напишите уравнение реакции горения.

2. С какими из перечисленных веществ может реагировать 30%-я соляная кислота: 1) $Ba(NO_3)_2$, 2) Fe_2O_3, 3) $Zn(OH)_2$, 4) SiO_2, 5) $AgNO_3$, 6) $KMnO_4$, 7) Cu, 8) PbO_2? Напишите уравнения соответствующих реакций, если они возможны.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»
kvant.info

Московский центр непрерывного математического образования
kvant.mccme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru

Костромской центр дополнительного образования «Эврика»
ceemat.ru

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №5)

1. 10 или 12, в зависимости от того, кто из ребят едет ближе к локомотиву.

2. Наша фигура состоит из двух прямоугольников (рис.1). Нетрудно убедиться, что любая прямая, проходящая через центр (т.е. точку пересечения диагоналей) произвольного прямоугольника, делит его на две равные части. Поэтому достаточно построить центры этих двух прямоугольников и провести через них прямую.

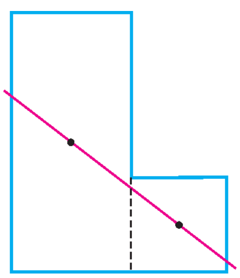


Рис. 1

3. Могут.
Пусть во всех плохих грибах было по 10 червяков, а в хороших грибах червяков не было вовсе. Тогда, если из каждого плохого гриба выползет по червяку (всего 90 червяков), а в каждый хороший гриб заползет по 9, то все грибы окажутся хорошими.

4. Всегда.
Проведем мысленный опыт: сдвинем немного картофелины так, чтобы одна слегка заходила в другую. Тогда их поверхности пересекутся по некоторой линии. При очень малом сдвиге эта линия будет замкнутым контуром, и проволочное кольцо, имеющее форму этого контура, можно будет надеть на обе картофелины.

5. Можно.
Скомбинируем два разделителя так, чтобы первый разделял весь входящий в него поток, а второй – одну из образовавшихся половин потока. Из двух получившихся четвертей исходного потока одну четверть отправим обратно, включив ее во входящий поток (рис.2). Пусть исходный входящий в нашу систему поток был мощности 1 (скажем, 100 человек в минуту). Обозначим мощность возвращаемой четверти исходного потока через x.

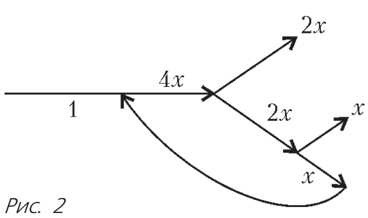


Рис. 2

Тогда весь входящий в первый разделитель поток будет имеет мощность $1 + x = 4x$, т.е. $x = 1/3$, что и решает задачу.
Замечание. Используя большее количество таких разделителей, можно было бы отделить любую рациональную долю исходного потока. Примечательно, что эти факты были обнаружены экспертами по противопожарной обороне, готовившимися к оптимальному использованию метро после атомной бомбежки.

ЗАДАЧИ

(см. с. 26)

1. 2009.
До того как последний наследник разорился, у него было $1 + 4 = 5$ фабрик. До того как его отец продал с молотка 5 фабрик, у него было $5\cdot 7 + 5 = 5\cdot 8$ фабрик. Следовательно, до того как младший сын мистера Твистера пустил на ветер 6 фабрик, у него их было $5\cdot 8\cdot 7 + 6$. Значит, у самого мистера Твистера изначально было

$$(5\cdot 8\cdot 7 + 6)\cdot 7 + 7 = 7(5\cdot 8\cdot 7 + 7) = 49\cdot 41 = 2009 \text{ фабрик.}$$

Можно было также принять изначальное количество фабрик за x и найти его из уравнения $\left(\left((x-7)/7-6\right)/7-5\right)/7-4=1$.

2. Можно.
Ясно, что можно провести меридианы так, чтобы они делили поверхность на одинаковые по форме и площади «дольки». После этого будем последовательно проводить параллели от одного из полюсов к другому так, чтобы каждая следующая отсекала от долек по $1/2011$ их площади.

3. 3 часа и 6 часов.
Пусть один насос наполняет бассейн за x часов, а другой – за y часов. По условию x и y – различные целые числа. За час первый насос заполняет $1/x$ часть бассейна, а второй – $1/y$ часть. Получаем уравнение $1/x + 1/y = 1/2$. Ясно, что оба числа x и y больше 2. Если x и y оба не меньше 4, то выражение слева от знака равенства не больше $1/2$, и равенство возможно только при $x = y = 4$. Этот случай нам не подходит. Значит, одно из чисел x, y меньше 4, и тем самым равно 3. Из уравнения находим, что второе число тогда равно 6.

4. 50 метров.
За первые 4 «шага» Петя попадает в точку B (рис.3), сдвигаясь на $3 - 1 = 2$ м на север и на $4 - 2 = 2$ м на восток. Следующие 4 шага отличаются от первых четырех тем, что они соответственно длиннее на 4 метра, и, тем самым, за эти 4 шага Петя снова сдвинется на 2 метра на север и на 2 метра на восток, и так далее. Заметим, что $1 + 2 + \ldots + 100 = 5050$, т.е. Петя сделает всего 99 шагов и еще половину 100-го шага. Если бы Петя сделал все 100 шагов целиком, он суммарно сдвинулся бы на $2\cdot(100/4) = 50$ м на север и на 50 м на восток. Так как последние 100 метров идут в направлении с запада на восток и 50 метров лишние, то Петя на самом деле сместился на восток на 0 метров, т.е. находится на расстоянии 50 м к северу от точки A.

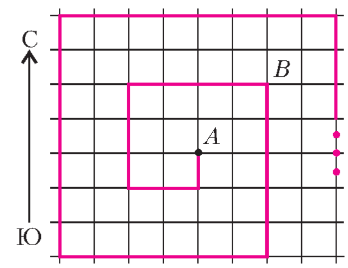


Рис. 3

5. Разделим все монеты на три группы по три монеты.
Пусть прилипшая монета принадлежит первой группе. Взвесим первую и вторую группы. Если установилось равновесие, то фальшивая монета в третьей группе, а все остальные, в том числе и прилипшая, настоящие. Поэтому при втором взвешивании положим на чашу весов вместе с прилипшей монету из третьей группы, а на другую чашу – одну настоящую и еще одну монету из третьей группы. Это позволит нам определить фальшивую монету.
Если после первого взвешивания легче оказалась чаша со второй группой, то фальшивая монета среди этих трех монет, и можно поступить так же, как и в первом случае.
Если после первого взвешивания чаша с прилипшей монетой оказалась легче, то фальшивая монета в первой группе, и достаточно сравнить две монеты из нее (прилипшую и одну из двух оставшихся), чтобы найти более легкую.

ПЕРЕЗАРЯДКА КОНДЕНСАТОРОВ

1. В 5 раз. **2.** $Q = 1350$ мДж. **3.** $\Delta q = 12$ мкКл.
4. $Q = 360$ мДж. **5.** $Q = 90$ мДж. **6.** $A = 40$ мДж.

XL МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

Теоретический тур

Задача 1

1.1. $L_1 = I_З\omega_{З_1} + I_{Л_1}\omega_{Л_1}$. **1.2.** $L_2 = I_З\omega_{З_2} + I_{Л_2}\omega_{Л_2}$.

1.3. $I_З\omega_{З_1} + I_{Л_1}\omega_{Л_1} = L_1 \approx I_{Л_2}\omega_{Л_2}$. **2.1.** $\omega_2^2 D_2^3 = GM_З$.

2.2. $D_2 = \frac{L_1^2}{GM_З M_Л^2}$. **2.3.** $\omega_2 = \frac{G^2 M_З^2 M_Л^3}{L_1^3}$.

2.4. $I_З = \frac{2}{5}\frac{4\pi}{3}\left(r_0^5\rho_0 + r_1^5(\rho_1 - \rho_0)\right)$. **2.5.** $I_З = 8{,}0\cdot 10^{37}$ кг · м².

2.6. $L_1 = 3{,}4\cdot 10^{34}$ кг · м² · с⁻¹. **2.7.** $D_2 = 5{,}4\cdot 10^8$ м $= 1{,}4 D_1$.

2.8. $\omega_2 = 1{,}6\cdot 10^{-6}$ с⁻¹, что соответствует периоду в 46 суток.

2.9. $I_З\omega_2 = 1{,}3\cdot 10^{32}$ кг · м² · с⁻¹, $I_{Л_2}\omega_2 = 3{,}4\cdot 10^{34}$ кг · м² · с⁻¹, $I_З\omega_2 : I_{Л_2}\omega_2 = 1:260$.

3.1. $F_1 = \frac{GmM_Л}{D_1^2 + r_0^2 - 2D_1 r_0\cos\theta}$.

3.2. $F_2 = \frac{GmM_Л}{D_1^2 + r_0^2 + 2D_1 r_0\cos\theta}$.

3.3. $\tau_1 = \frac{GmM_Л r_0 D_1 \sin\theta}{\left(D_1^2 + r_0^2 - 2D_1 r_0\cos\theta\right)^{3/2}}$.

3.4. $\tau_2 = \frac{GmM_Л r_0 D_1 \sin\theta}{\left(D_1^2 + r_0^2 + 2D_1 r_0\cos\theta\right)^{3/2}}$.

3.5. $\tau = \tau_1 - \tau_2 \approx \frac{6GmM_Л r_0^2 \sin\theta\cos\theta}{D_1^3}$.

3.6. $\tau = 4{,}1\cdot 10^{16}$ Н · м. **3.7.** $\Delta D_1 = 0{,}034$ м.

3.8. $\Delta\omega_{З_1} = -1{,}6\cdot 10^{-14}$ с⁻¹, $\Delta T_З = 1{,}9\cdot 10^{-5}$ с.

4.1. $E = \frac12 I_З\omega_{З_1}^2 + \frac12 I_Л\omega_{Л_1}^2 - \frac{GM_З M_Л}{D_1} = \frac12 I_З\omega_{З_1}^2 - \frac12\frac{GM_З M_Л}{D_1}$.

4.2. $\Delta E = I_З\omega_{З_1}\Delta\omega_{З_1} + \frac12\frac{GM_З M_Л}{D_1^2}\Delta D_1 = -9{,}0\cdot 10^{19}$ Дж.

4.3. $M_в = 4\pi r_0^2 h\rho_в = 2{,}6\cdot 10^{17}$ кг.

4.4. $\Delta E_в = -9{,}3\cdot 10^{19}$ Дж. Результат хорошо согласуется с предыдущим.

Задача 2

Ключом к решению задачи является эффект Доплера (точнее, продольный эффект Доплера). Частота монохроматического света, фиксируемая наблюдателем, зависит от скорости движения источника v относительно наблюдателя:

$$\omega' = \omega\sqrt{\frac{1\pm v/c}{1\mp v/c}} \approx \omega\left(1\pm\frac{v}{c}\right),$$

где ω – частота источника. Верхние и нижние знаки в формуле обозначают, соответственно, движение источника и наблюдателя навстречу друг другу и наоборот. Второе равенство справедливо в приближении малых скоростей (нерелятивистское приближение).

1.1. $\omega_0 \approx \omega\left(1\pm\frac{v}{c}\right)$. **1.2.** $p_а = p - \hbar q \approx mv - \frac{\hbar\omega_л}{c}$.

1.3. $\varepsilon_а = \frac{p_а^2}{2m} + \hbar\omega_0 \approx \frac{mv^2}{2} + \hbar\omega_л$.

2.1. $\varepsilon_ф \approx \hbar\omega_л$. **2.2.** $p_ф \approx -\frac{\hbar\omega_л}{c}$.

2.3. $p_а + p_ф \approx p - \hbar q$, $p_а \approx p = mv$. **2.4.** $\varepsilon_а \approx \frac{p^2}{2m} = \frac{mv^2}{2}$.

3.1. $\varepsilon_ф \approx \hbar\omega_0\left(1+\frac{v}{c}\right) \approx \hbar\omega_л\left(1+\frac{v}{c}\right)^2 \approx \hbar\omega_л\left(1+\frac{2v}{c}\right)$.

3.2. $p_ф \approx \frac{\hbar\omega_л}{c}\left(1+\frac{v}{c}\right)$.

3.3. $p_а = p - \hbar q - p_ф \approx mv - 2\frac{\hbar\omega_л}{c}$.

3.4. $\varepsilon_а = \frac{p_а^2}{2m} \approx \frac{mv^2}{2}\left(1 - 2\frac{\hbar q}{mv}\right)$.

4.1. $\overline{\varepsilon_ф} = \frac12\varepsilon_ф^+ + \frac12\varepsilon_ф^- \approx \hbar\omega_л\left(1+\frac{v}{c}\right)$.

4.2. $\overline{p_ф} = \frac12 p_ф^+ + \frac12 p_ф^- \approx \frac{\hbar\omega_л}{c}\frac{v}{c} = mv\left(\frac{\hbar q}{mv} + \frac{v}{c}\right) \approx 0$ (второй порядок).

4.3. $\overline{\varepsilon_а} = \frac12\varepsilon_а^+ + \frac12\varepsilon_а^- \approx \frac{mv^2}{2}\left(1-\frac{\hbar q}{mv}\right)$.

4.4. $\overline{p_а} = \frac12 p_а^+ + \frac12 p_а^- \approx p - \frac{\hbar\omega_л}{c}$.

5.1. $\overline{\Delta\varepsilon_а} \approx -\frac12\hbar q v = -\frac12\hbar\omega_л\frac{v}{c}$. **5.2.** $\overline{\Delta p_а} \approx -\hbar q = -\frac{\hbar\omega_л}{c}$.

6.1. $\overline{\Delta\varepsilon_а} \approx +\frac12\hbar q v = +\frac12\hbar\omega_л'\frac{v}{c}$. **6.2.** $\overline{\Delta p_а} \approx +\hbar q = +\frac{\hbar\omega_л}{c}$.

7.1.
$$F = \left(\frac{\Omega_R^2}{\left(\omega_0 - \omega_л + \omega_л\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2} - \frac{\Omega_R^2}{\left(\omega_0 - \omega_л - \omega_л\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2}\right) N\Gamma\hbar q.$$

8.1. $F \approx -\frac{4N\hbar q^2\Omega_R^2\Gamma}{\left(\left(\omega_0-\omega_л\right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2\right)^2}\left(\omega_0-\omega_л\right)v$.

8.2. $\omega_0 < \omega_л$. **8.3.** $\omega_0 = \omega_л$. **8.4.** $\omega_0 > \omega_л$. **8.5.** $\omega_0 > \omega_л$.

9.1. $v = v_0 e^{-\beta\tau/m}$ (β может быть найден из 8.1, поскольку $F = -\beta v$).

9.2. $T = T_0 e^{-2\beta\tau/m}$.

Задача 3

1.1. $T = \frac{q^2}{12\pi\varepsilon_0 dk} = 5{,}5\cdot 10^9$ К.

2.1. $T_ц = \frac{GMm_p}{2kR}$. **2.2.** $\frac{M}{R} = \frac{2kT_ц}{Gm_p}$.

2.3. $\frac{M}{R} = 1{,}4\cdot 10^{24}$ кг · м⁻¹.

2.4. $\frac{M_С}{R_С} = 2{,}9\cdot 10^{21}$ кг · м⁻¹; как видим, этот результат на три порядка меньше предыдущего.

3.1. $T_ц = \frac{q^4 m_p}{24\pi^2\varepsilon_0^2 k h^2}$. **3.2.** $T_ц = 9{,}7\cdot 10^6$ К.

3.3. $\frac{M}{R} = 2{,}4\cdot 10^{21}$ кг · м⁻¹ $\approx \frac{M_С}{R_С} = 2{,}9\cdot 10^{21}$ кг · м⁻¹.

4.1. $\frac{M}{R} = \frac{q^4}{12\pi^2\varepsilon_0^2 G h^2}$.

5.1. $n_e = \frac{M}{(4/3)\pi R^3 m_p}$. **5.2.** $d_e = n_e^{-1/3} = \left(\frac{M}{(4/3)\pi R^3 m_p}\right)^{-1/3}$.

5.3. $R_{\min} = \frac{\varepsilon_0^{1/2} h^2}{4^{1/4} q m_e^{3/4} m_p^{5/4} G^{1/2}}$. **5.4.** $R_{\min} = 6{,}9\cdot 10^7$ м $= 0{,}10 R_С$.

5.5. $M_{\min} = 1{,}7\cdot 10^{29}$ кг $= 0{,}09 M_С$.

6.1. $v(\mathrm{He}) = \frac{2^{1/2} q^2}{\pi\varepsilon_0 h} = 2{,}0\cdot 10^6$ м · с⁻¹,

$T(\mathrm{He}) = \frac{v^2(\mathrm{He})\, m_{\mathrm{He}}}{3k} = 6{,}5\cdot 10^8$ К.

НАПЕЧАТАНО В 2009 ГОДУ

журнал Квант ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия, М.В.Сумнина, В.М.Хлебникова

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: 930-56-48
E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info
Сайт: kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области,
Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru
Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00
Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59

НостальгическиЙ ПОЕДИНОК

В сентябре в Валенсии (Испания) состоялся матч из двенадцати партий (4 в быстрые шахматы и 8 в блиц) между 12-м и 13-м чемпионами мира Анатолием Карповым и Гарри Каспаровым. Он был посвящен 25-летию их исторического поединка в Колонном зале Дома Союзов. «Быстрый» матч Гарри выиграл 3:1, в блиц – 6:2, в итоге – общая победа 9:3.

Напомним, что первый поединок Карпов – Каспаров за шахматную корону стартовал в Москве 10 сентября 1984 года. Этот марафон продолжался пять месяцев, но так и не был завершен. Поединок был безлимитный – игрался до шести побед (ничьи не засчитывались). Начало его оказалось катастрофическим для претендента: в девяти партиях он четыре раза потерпел фиаско. Если бы в этот момент Карпов не сбавил напора, не стал бы избегать риска, а стремился к острой игре, то деморализованный претендент вряд ли бы долго продержался. Эта сдержанность и подвела его – получив передышку, Каспаров сумел оправиться.

Последовала беспрецедентная серия из 17 ничьих, а 27-ю партию Карпов снова выиграл – 5:0. Но к этому времени шахматные силы гроссмейстеров уже выровнялись, и продолжилась ничейная серия. На финише Гарри выиграл еще две партии. Счет сократился – 5:3, а 15 февраля 1985 года президент ФИДЕ Флоренсио Кампоманес заявил, что все физические ресурсы участников исчерпаны и матч завершается без объявления победителя. В сентябре 1985 года стартовал повторный матч, опять в Москве, в Концертном зале имени П.И.Чайковского, но уже по традиционной системе из 24 партий. Он закончился со счетом 13:11 в пользу Каспарова, ставшего 13-м чемпионом мира.

Марафон двух «К» четверть века назад стал одним из самых крупных событий в шахматном мире, и вполне естественно, что решено было отметить его круглую дату. Далее планируется провести матчи во всех странах, где два «К» боролись за корону, – в Париже, Нью-Йорке, Лондоне и Москве.

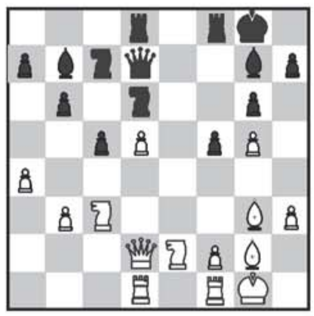
Приведем несколько партий в быстрые шахматы, сыгранных Карповым и Каспаровым в Валенсии.

А.Карпов – Г.Каспаров

1-я партия

Защита Грюнфельда

1. d4 ♘f6 2. c4 g6 3. g3 ♗g7 4. ♗g2 d5. Этот дебют встречался в многолетнем единоборстве двух «К» более двадцати раз. **5. cd ♘:d5 6. e4 ♘b6 7. ♘e2 c5 8. d5 0-0 9. 0-0 e6 10. ♘bc3 ♘a6 11. h3 ed 12. ed ♘c4 13. b3 ♘d6.** Вечный вопрос: в чью пользу изолированная, но хорошо блокированная пешка? **14. ♗f4 b6 15. ♕d2 ♗b7 16. ♖ad1 ♘c7 17. g4.** Препятствуя переводу коня d6 через f5 на d4. Но это азартное движение пешки отняло у Карпова драгоценное время, разница уже составила десять минут. **17…♕d7.** Новый ход – отсюда ферзь поддерживает оба фланга. **18. a4 f5!** Пора потревожить беспечную пешку «g». **19. g5 ♖ad8 20. ♗g3.** Белый слон освободил дорогу коню на e6, но пройти туда со всеми удобствами не удается.



20…f4! Каспаров в своем репертуаре – изящная жертва пешки за инициативу. Здесь есть и геометрический мотив – контроль над полем f5 утрачен, и черный конь через него тоже устремляется в центр. **21. ♘:f4 ♘f5 22. ♘b5 ♘:b5 23. ab ♘d4.** Оценка позиции здесь уже не имела значения, поскольку у белых осталась всего одна минута против десяти у противника. Да и она начала испаряться на глазах – 30 секунд, 20, 10, 5. И в тот момент, когда Карпов переставил коня на e6, его время истекло. После 24. ♘e6 ♘:e6 25. de ♕:d2 26. ♖:d2 ♖:d2 27. ♗:b7 ♖e8 проигрывать черным совсем необязательно.

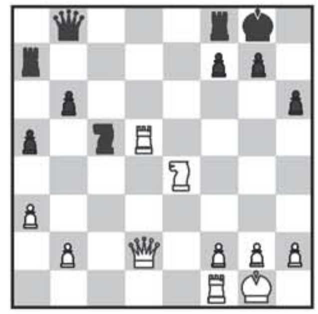
Г. Каспаров – А. Карпов

2-я партия

Ферзевый гамбит

1. d4 d5 2. c4 e6 3. ♘c3 ♗e7 4. cd ed 5. ♗f4 c6 6. ♕c2 ♗d6 7. ♗:d6 ♕:d6 8. e3 ♘e7 9. ♗d3 ♘d7 10. ♘e2 h6. Обычное продолжение 10…♘f6; черные опасно ослабляют королевский фланг. **11. 0-0 0-0 12. a3 a5 13. ♖ad1 b6 14. e4 de 15. ♘:e4 ♕b8.** Если бы ферзь отступил на c7, черные избежали бы неприятностей. Теперь разница в активности фигур видна невооруженным глазом. **16. ♘2c3 ♗a6 17. ♗:a6 ♖:a6 18. d5! ♘:d5 19. ♘:d5 cd 20. ♖:d5 ♖a7 21. ♕d2 ♘c5.**

22. ♘f6+!! Опять красивая геометрия. Мы имеем классический пример



на тему разрушения неприятельской крепости. **22…gf.** При отступлении короля в угол следует ♖h5 с решающим ударом на h6. **23. ♕:h6 f5 24. ♕g5+ ♔h8 25. ♕f6+ ♔g8 26. ♖:f5 ♔e4 27. ♕h4 ♖e8 28. ♖h5.** И тут повторилась знакомая картина. Карпов лихорадочно двинул вперед пешку «f», но уронил «флажок». Впрочем, после 28…f5 29. ♖h8+ черные теряют все на свете. Настоящий разгром!

А.Карпов – Г.Каспаров

3-я партия

Защита Грюнфельда

1. d4 ♘f6 2. c4 g6 3. g3 ♗g7 4. ♖g2 d5 5. cd ♘:d5 6. c4 ♘b6 7. ♘e2 c5 8. d5 0-0 9. 0-0 e6 10. ♘ec3. В первой партии на c3 пошел другой конь. **10…♘a6 11. a4 ed 12. ed ♘b4 13. ♗e3 ♗d4.** Бить два раза на d4 нельзя из-за вилки на c2. **14. a5 ♗:e3.** И снова Каспаров жертвует пешку. **15. ab ♗d4 16. ba ♗f5 17. ♘a3 ♖:a7 18. ♘ab5 ♖:a3!** А теперь и качество. **19. ♖:a3 ♗:b2 20. ♖e3 ♕b6 21. ♕e2 ♗g7 22. ♖d1 ♗d7 23. ♘a3 ♗d4 24. ♖e7 ♗a4 25. ♖c1 ♕f6 26. ♖:b7 ♗b2.** Следовало включить в бой ладью – 26…♖e8, и обстановка на доске оставалась напряженной. **27. ♖:c5.** Материальное равновесие восстановлено, но легкие фигуры черных находятся в подвешенном состоянии. **27…♗:a3 28. h4 ♘d3 29. ♖a5 ♘c5 30. ♖ba7 ♕d4 31. ♕e3 ♕:e3 32. fe ♗c1 33. ♔f2 ♘d3+.** И здесь заслуживало внимания 33…♖e8!, и черные держатся в эндшпиле. **34. ♔e2 ♗c2 35. d6! ♖e8?** Самый неподходящий момент для активизации ладьи, необходимо было 35…♘b2 36. d7 ♗d1+ 37. ♔f1 ♗g4. **36. ♖a8! Черные сдались,** так как пешка «d» становится ферзем.

Остается пожалеть, что Каспаров не собирается возвращаться в «большие шахматы». Матч показал, что в шахматах ему по-прежнему по плечу любые задачи.

Е.Гик

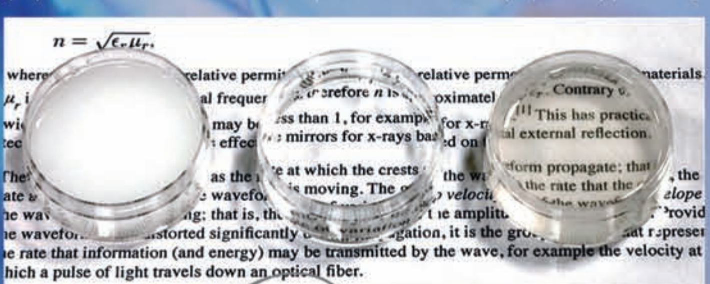
Индекс 70465

Прогулки с физикой

Как сделать молоко прозрачным?

Возьмите прозрачное блюдце, наполните его водой и поставьте на страницу раскрытой книги. Затем с помощью пипетки добавляйте в блюдце молоко и непрерывно перемешивайте жидкость. Делайте это до тех пор, пока через дно блюдца уже нельзя будет разглядеть слов на странице. Так мы из прозрачной жидкости сделаем непрозрачную. Теперь попробуем из непрозрачного раствора молока в воде сделать прозрачный. Для этого будем растворять в этой жидкости сахарный песок...

(Продолжение – на странице 29 внутри журнала)



Прогулки с физикой